

THESE

présentée par

Bernd Michael Müller-Bierl

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

(SPECIALITE: Optique, Optoélectronique et Microondes)

**RAYONNEMENT ET COUPLAGE ENTRE LES
INTERCONNEXIONS DANS LES CIRCUITS
HYPERFREQUENCES. ETUDE AU MOYEN DE
LA METHODE TLM.**

soutenue le 27.2.1997

JURY

**H. BAUDRAND
D. POMPEI
M. NEY
P. SAGUET
F. NDAGIJIMANA**

**Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur**

**Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electromagnétisme,
Microondes et Optoélectronique**

107
140

**Rayonnement et couplage entre les
interconnexions dans les circuits
hyperfréquences. Etude au moyen de la
méthode TLM.**

Bernd Michael Müller-Bierl

Février 25, 1997

۲۲

Table de matières

1	Introduction à l'analyse des lignes micro-rubans	7
1.1	Introduction	7
1.2	Discussion préliminaire	8
1.3	Méthode de la transformation conforme modifiée	11
1.4	Méthode des différences finies et méthode de relaxation	17
1.5	Méthode variationnelle dans le domaine fréquentiel	20
1.6	Méthode des équations intégrales	36
2	La méthode TLM	41
2.1	Introduction	41
2.2	La méthode TLM en espace libre	42
2.2.1	Processus TLM en 1D	43
2.2.2	Processus TLM en 2D	47
2.2.3	Processus TLM en 3D	51
2.3	La méthode TLM dans des milieux inhomogènes à pertes	56
2.3.1	Simulation de murs électriques et de murs magnétiques	57
2.3.2	Noeuds en 1D	57
2.3.3	Noeuds en 2D	62
2.3.4	Noeuds en 3D	68
3	La méthode TLM en espace ouvert	81
3.1	Introduction	81
3.2	Conditions absorbantes aux limites	82
3.2.1	Extrapolation en espace temps	83
3.2.2	L'équation unidirectionnelle et le problème d'approximation	83
3.2.3	Une formulation due à Lindmann	90
3.2.4	Une formulation due à Higdon et Keys	91

3.2.5	Coefficient de réflexion théorique des approximations de l'équation d'onde unidirectionnelle	94
3.2.6	La théorie des zones absorbantes	96
3.3	Expérimentation numérique des conditions aux limites	100
3.3.1	Tests de la formulation de Lindmann et extrapolation espace-temps dans le cas 2D	100
3.3.2	Tests de la formulation de Lindmann et de l'extrapolation espace-temps dans le cas 3D	104
3.3.3	Tests de la formulation de Higdon-Keys en 3D	120
3.3.4	Filtrage numérique pour des conditions d'extrapolation	128
3.3.5	Application de la théorie des zones d'absorption pour le noeud condensé symétrique	132
3.3.6	Application des conditions d'extrapolation pour des calculs de lignes micro-rubans	134
3.3.7	Application des conditions d'extrapolation avec le noeud condensé asymétrique	141
3.4	Conclusion	141
3.4.1	Conditions absorbantes aux limites basées sur des schémas d'extrapolation	142
3.4.2	Conditions d'absorption aux limites et techniques des zones d'absorption	142
3.4.3	Une approche plus directe des conditions absorbantes aux limites pour la méthode TLM	143
4	Application de la méthode TLM en espace ouvert	145
4.1	Etudes préliminaires: Influence du domaine de calcul	146
4.1.1	Influence de la hauteur du domaine de calcul sur le signal guidé	146
4.1.2	Influence de la largeur du domaine de calcul sur le signal guidé	148
4.1.3	Influence de la fréquence sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné	149
4.1.4	Influence de la permittivité ϵ_r du substrat sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné	149
4.1.5	Influence du rapport entre la largeur du ruban et l'épaisseur du substrat sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné	150
4.1.6	Conclusion	150
4.2	Calcul des paramètres $[S_{ij}]$ pour deux lignes micro-rubans couplées	153
4.3	Calcul du diagramme de rayonnement en champ proche pour le coude	159
4.4	Calcul du diagramme de rayonnement en champ lointain pour le coude	163
4.5	Conclusion	163
5	Conclusion	167

Preface

Cette thèse traite du calcul des paramètres caractéristiques et des diagrammes de rayonnement des lignes de transmission utilisées dans les circuits hyperfréquences. Le calcul au moyen de la méthode utilisée y inclut les effets de rayonnement et de couplage entre lignes et discontinuités de lignes pour des signaux de transmission avec une longueur d'onde comparable ou petite devant la structure considérée. On pense (p. ex. Hofer [Hoe92]) qu'avec les moyens informatiques d'aujourd'hui la modélisation de la transmission des signaux le long des lignes par des algorithmes discrets introduits sur ordinateur est devenue appropriée pour établir des moyens d'investigation et de développement à l'aide d'ordinateurs (Computer aided design ou CAD en anglais) puissants. Ces outils informatiques servent à caractériser et à développer des circuits micro-ondes. Nous avons choisi d'utiliser pour notre étude une méthode basée sur un algorithme discret. La méthode simule la propagation dans le temps des champs électromagnétiques en chaque point d'un espace 3D, c'est à dire qu'elle trace la fonction des six composantes du champ en chaque point d'un domaine de calcul 3D en fonction du temps. Cela est possible grâce à un processus de répartition d'impulsions sur une grille introduit sur ordinateur. Cette méthode dite *méthode de la matrice des lignes de transmission* ou *méthode TLM* a été proposée premièrement pour des problèmes 2D par Johns et Beurle en 1971 [Joh71]. Dans la suite elle a été élargie aux domaines de calcul 3D. Elle a été mise à jour en 1987 par l'introduction d'un noeud condensé symétrique par Johns [Joh87].

Le processus TLM n'est qu'un des algorithmes discrets dans le domaine temporel à résoudre les équations de Maxwell en 3D pour des structures de géométrie complexe. Il est analogue à la méthode des différences finies dans le domaine temporel introduite par Yee [Yee66]. En fait, dès l'introduction de la méthode TLM par Johns et Beurle, différents auteurs ont essayé d'établir une équivalence entre la méthode TLM et la méthode des différences finies dans le domaine temporel ou FD-TD ¹.

Un problème important de l'utilisation des algorithmes discrets en 3D réside dans la limitation de l'espace mémoire et la limitation en temps de calcul. Par exemple un calcul avec $100 \times 100 \times 100$ noeuds demande 72 Mega octets de mémoire vive alors que pendant ce travail (1993-1996) nous avons été limité la plupart de temps au laboratoire à 50.5 Mega octets au maximum². Une possibilité pour réduire le domaine de calcul consiste à introduire des conditions d'espace ouvert, c'est à dire d'appliquer aux limites du domaine de calcul des

¹Malgré les assurances des auteurs, nous ne croyons pas que cette équivalence ait été démontrée d'une manière exacte. Nous doutons même que le processus TLM soit vraiment l'équivalent d'un processus à différences finies: La méthode TLM travaille dans l'espace des impulsions alors que la méthode des différences finies travaille directement sur les champs; Il nous semble discutable qu'une transformation entre les deux espaces puisse être accomplie par une simple transformation des paramètres.

²Machine du type INTEL Pentium 60 MHz avec 60 MByte mémoire vive (dont 50.5 MByte utilisable) sous gestion du compilateur Microsoft FL32 FORTRAN

conditions qui permettent aux ondes de sortir librement. Cela permet de tronquer le domaine de calcul proche des limites de la structure (le “dispositif”) considérée. De plus le choix d’une grille à mailles parallélépipédiques permet de simuler avec une haute résolution spatiale (et donc une grand besoin d’espace mémoire) seulement les régions du domaine de calcul où la variation du champ est grande. La technique condition d’espace ouvert a le désavantage d’introduire des réflexions supplémentaires aux limites du domaine de calcul.

Le calcul des caractéristiques des discontinuités micro-rubans doit tenir compte des erreurs introduites par ces réflexions. En plus, le processus TLM possède — comme chaque processus sur grille — une dispersion numérique inhérente qui contribue à l’erreur totale sur le résultat. Bien que la méthode s’appuie directement sur les équations de Maxwell — sans approximations supplémentaires — les résultats sont alors soumis à des erreurs d’origines différentes et doivent être interprétés d’une manière assez précise.

Nous nous intéressons dans cette thèse en particulier à des effets de rayonnement et de couplage entre les interconnexions dans les circuits micro-rubans.

Nous allons introduire tout d’abord, dans un premier Chapitre, les techniques d’analyse “quasi-TEM” afin de traiter les lignes micro-rubans. Ces techniques ont été développées surtout en 2D et ont permis d’établir des expressions analytiques (formules approximatives) pour les lignes micro-rubans.

Les résultats basés sur l’approximation TEM sont valables seulement en régime basse fréquence, du fait que l’approximation TEM suppose que la longueur d’onde soit grande devant la structure considérée.

Dans le deuxième Chapitre nous allons présenter la méthode TLM. Nous avons choisi de l’introduire sur la base de l’article de LoVetri et Simons [LoV93] qui permet de comprendre le processus TLM indépendamment des schémas de lignes de transmission utilisés à l’origine de cette méthode. Afin d’expliquer l’origine de la technique de stubs — introduite afin de simuler des diélectriques et la technique de changement de maillage — nous étions quand même obligés de reprendre certaines bases “historiques” de la méthode. Nous pensons que dans un avenir proche il devrait être possible de fonder la méthode TLM entièrement sur des dérivations mathématiques sans l’intermédiaire d’arguments par équivalence.

Dans un troisième Chapitre nous introduisons le problème de l’espace ouvert et la théorie de la condition d’extrapolation basée sur l’équation unidirectionnelle — qui est une théorie exacte et complètement comprise. Malheureusement, particulièrement en espace 3D, des instabilités numériques semblent empêcher l’application efficace de cette théorie pour tronquer le domaine de calcul. Nous présentons des résultats numériques et des améliorations (dissipation numérique, filtrage numérique en temporel) qui devraient rendre cette méthode stable. Dans le même Chapitre nous présentons ensuite la méthode d’introduction de milieux absorbants aux limites du domaine de calcul. Nous décrivons la théorie des couches absorbantes parfaites de Bérenger et présentons des résultats numériques sur une application simplifiée de ces conditions pour la méthode TLM et le noeud condensé symétrique. Dans le quatrième Chapitre nous décrivons la manière de faire des calculs pour extraire les caractéristiques des discontinuités micro-rubans — y compris les effets de rayonnement et couplage entre lignes et discontinuités de lignes en régime haute fréquence. Nous présentons

des résultats pour deux lignes couplées et pour le coude.

Il me reste à remercier sincèrement et cordialement les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail. D'abord je remercie mon ancien Professeur à l'université Albertus-Magnus de Fribourg, Monsieur le Vice-Président de l'université et le Professeur Josef HON-ERKAMP pour m'avoir encouragé à préparer une thèse. Je remercie vivement Monsieur le Directeur de l'institut Français de Fribourg, Michel METAYER, et Monsieur le conseiller pour la science et la technologie à l'ambassade de France à Bonn, Noël DECOURT pour avoir soutenu au moyen d'une bourse d'état de faire cette thèse en France. Je remercie Madame Béatrice CABON pour l'invitation à faire cette thèse dans un laboratoire de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), Monsieur le Professeur et — à l'époque — responsable pour la formation DEA, Michel BOUTHINON, Monsieur le Professeur et Directeur de l'École d'ingénieurs dans laquelle se trouve le laboratoire, Michel BARIBAUD, Monsieur le Professeur (à l'époque directeur du laboratoire) Etienne PIC, Monsieur le Professeur et directeur du laboratoire Pierre SAGUET pour l'accueil et le soutien de ce travail. Je remercie particulièrement Monsieur le professeur et directeur Pierre SAGUET qui a dirigé cette thèse et qui a toujours eu beaucoup de compréhension pour mes problèmes, ainsi que Monsieur Fabien NDAGIJIMANA, qui a co-dirigé cette thèse. Je remercie le jury constitué de Monsieur le Professeur H. BAUDRAND, Monsieur le Professeur M. NEY, Monsieur le Professeur D. POMPEI, Monsieur le Professeur P. SAGUET et Monsieur F. NDAGIJIMANA pour la réception de ce travail. Je remercie finalement le ministère Français des affaires d'étrangères -- représenté à Grenoble par Madame Th. LEPROUX du CROUS -- d'avoir soutenu ce travail par une bourse d'état.

Grenoble, le 25.2.1997

Bernd Müller-Bierl

Chapitre 1

Introduction à l'analyse des lignes micro-rubans

1.1 Introduction

La ligne micro-ruban représente la deuxième génération de lignes de transmission dans des circuits hyperfréquences. Son précurseur, la ligne ruban ("stripline") a été inventé aux environs de 1949. La technologie micro-ruban est réalisable à partir de la fabrication des substrats diélectriques ou ferrites à pertes faibles comme l'époxy ou le verre téflon.

Le Chapitre contient une discussion de quelques techniques semi-analytiques et numériques d'analyse basées sur l'approximation TEM des lignes micro-rubans. Ces techniques donnent des formules approximatives sur les impédances propres, les constantes de propagation et la permittivité relative effective ϵ_{eff} d'une ligne avec un certain substrat. Les techniques présentées ici sont utilisées aussi en dehors de l'approximation TEM. Par exemple, la méthode des différences finies ou la méthode des moments utilisée afin de résoudre les équations variationnelles ou les équations intégrales sont capables de donner des résultats pour des fréquences élevées où l'approximation TEM n'est plus valable. Nous nous restreignons à l'analyse quasi-TEM puisque cela nous permet d'introduire les principes de base des méthodes semi-analytiques et numériques d'analyse des lignes micro-ruban de manière exemplaire. Une discussion plus complète des méthodes de calcul pour déterminer les propriétés des lignes micro-ruban et des discontinuités de lignes micro-ruban ainsi que des formules semi-analytiques obtenues à partir de ces méthodes est donnée par exemple dans Gupta et al. [Gup79]. Une discussion des techniques semi-analytiques pour des fréquences élevées basées sur la théorie des ondes se trouve dans l'article de Mittra et Itoh [You74].

Les méthodes basées sur l'approximation TEM sont quasi-statiques, c'est à dire valables seulement pour des fréquences où la structure est petite devant la longueur d'onde. Les résultats obtenus sont alors limités en fréquence à quelques Gigahertz. Par contre, l'utilisation des circuits hyperfréquences se fait aujourd'hui pour des fréquences de plus en

plus élevées.

Nous allons voir dans le Chapitre qui suit une méthode dynamique, la méthode TLM, sur laquelle nous nous sommes appuyés. Contrairement aux méthodes statiques, les méthodes dynamiques¹ tiennent entièrement compte des effets des hautes-fréquences, c'est à dire des effets lorsque la longueur d'onde devient comparable ou petite devant la structure considérée. Les méthodes dynamiques sont nécessaires pour des fréquences de plusieurs dizaines de Gigahertz, où l'effet de dispersion des signaux le long des lignes ne peut plus être négligé.

Le principal but du Chapitre est d'introduire quelques fondements des méthodes semi-analytiques et numériques, autres que la méthode TLM utilisée dans la suite, afin de placer ce travail dans l'ensemble des investigations sur la caractérisation des lignes micro-ruban.

1.2 Discussion préliminaire

Nous allons discuter dans la suite un certain nombre de techniques où nous supposons que la propagation se fait pratiquement en mode TEM ("quasi-TEM") afin de déterminer analytiquement les caractéristiques d'une ligne micro-ruban. Nous y faisons l'approximation que la longueur d'onde en espace libre est grande devant la largeur du ruban et grande devant l'épaisseur du substrat. La figure 1.1 montre plusieurs sections droites de lignes de transmission micro-ruban typiques.

A l'exemple de la section droite standard montrée dans Fig. 1.1(a) nous allons expliquer pourquoi l'analyse quasi-TEM est valable pour des basses fréquences seulement: Les composantes électriques et magnétiques de la solution caractéristique de la structure peuvent être exprimées au moyen d'un potentiel scalaire ϕ qui doit satisfaire

$$\nabla_t^2 \phi + (k^2 - \beta^2) \phi = 0 \quad \text{dans l'air} \quad (1.1)$$

$$\nabla_t^2 \phi + (\epsilon_r k^2 - \beta^2) \phi = 0 \quad \text{dans le substrat} \quad (1.2)$$

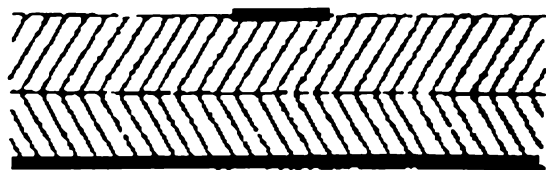
où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde en espace libre, β est la constante de phase et l'index "t" de l'opérateur nabla indique la dérivée dans les directions de la section droite seulement. Pour $\epsilon_r = 1$ la solution de premier ordre est le mode TEM avec $\beta = k$. Pour ce cas limite, le potentiel ϕ satisfait l'équation de Laplace dans la section droite et ne crée aucune composante longitudinale du champ électrique ou du champ magnétique. Maintenant on considère $\epsilon_r \neq 1$ comme perturbation au cas $\epsilon_r = 1$. L'effet de cette perturbation est petit lorsque la fréquence (et donc k) sont petits. La solution quasi-TEM peut donc être regardée comme solution d'ordre zéro des équations exactes 1.1 et 1.2. Les résultats obtenus avec la méthode quasi-TEM ne sont donc plus valables lorsque k devient grand.

Sous l'approximation TEM, une ligne micro-ruban est décrite de façon adéquate par deux paramètres, l'impédance caractéristique Z et la constante de propagation $\gamma = \alpha + j\beta$. La théorie des lignes pour une ligne à pertes faibles nous donne les relations

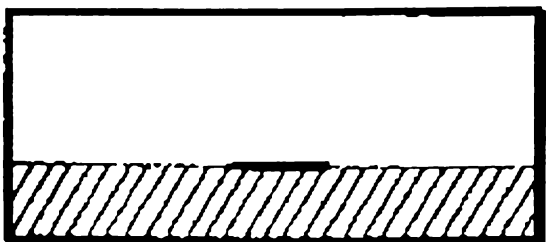
¹En anglais on parle dans ce contexte de "full wave analysis" ou "full hybrid mode analysis".



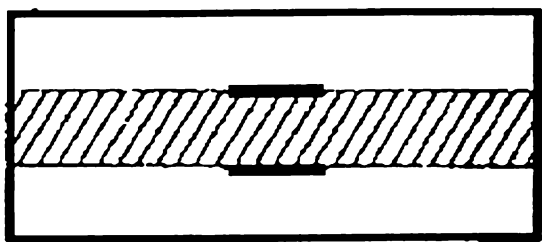
(a)



(c)



(b)



(d)

Figure 1.1: *Section droite de certaines lignes de transmission micro-ruban d'après [You74].*

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{j\omega L} - \frac{G}{j\omega C} \right) \right] \quad (1.3)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{LC}}{2} \left[\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right] \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (1.4)$$

où R , G , L et C sont la résistance, la conductance, l'inductance et la capacité linéique d'une ligne de transmission infiniment longue; La fréquence ω est une fréquence angulaire, α est la constante d'atténuation et β est la constante de phase. Pour une ligne sans pertes on a $R = G = 0$, $\alpha = 0$ et Z est réel. Les valeurs de Z et β peuvent aussi bien être exprimées au moyen de la vitesse de phase $v = 1/\sqrt{LC}$ comme

$$\beta = \omega/v \quad Z = 1/(vC) \quad (1.5)$$

Nous notons que les effets de dispersion sont négligés dans l'approximation TEM. La vitesse de phase est alors égale à la vitesse de groupe.

Nous allons démontrer que pour un problème TEM sans pertes, le problème de la détermination de β et Z revient à déterminer la capacité linéique C . Considérons deux configurations de la figure 1.1(a): La première a un diélectrique avec une permittivité relative $\epsilon_r \neq 1$. La deuxième est une ligne homogène TEM obtenue en enlevant le substrat, c'est à dire $\epsilon_r = 1$. Dans ce cas $v = c_0$, on a alors

$$\beta_0 = \omega/c_0 \quad Z = 1/(c_0 C_0) \quad (1.6)$$

où c_0 est la vitesse de la lumière en espace libre et l'indice 0 indique le cas $\epsilon_r = 1$. Si le substrat n'est pas magnétique, le valeur de l'inductance L est la même pour les deux lignes. On a alors

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{1}{c_0 \sqrt{CC_0}} \\ \beta &= \beta_0 \sqrt{\frac{C}{C_0}} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{C}{C_0}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

où Z_0 et β_0 sont donnés par l'Eqn. 1.6. L'équation 1.7 implique que Z et β peuvent être obtenus par les capacités linéiques C et C_0 de la ligne micro-ruban et de la ligne micro-ruban sans substrat.

Dans la suite nous allons décrire certaines techniques quasi-TEM afin d'évaluer la capacité des lignes micro-rubans de type Fig. 1.1. La discussion est fondée sur un article de Mittra et al. [Mit74] qui lui-même est fondé sur des articles parus entre 1965 et 1974.

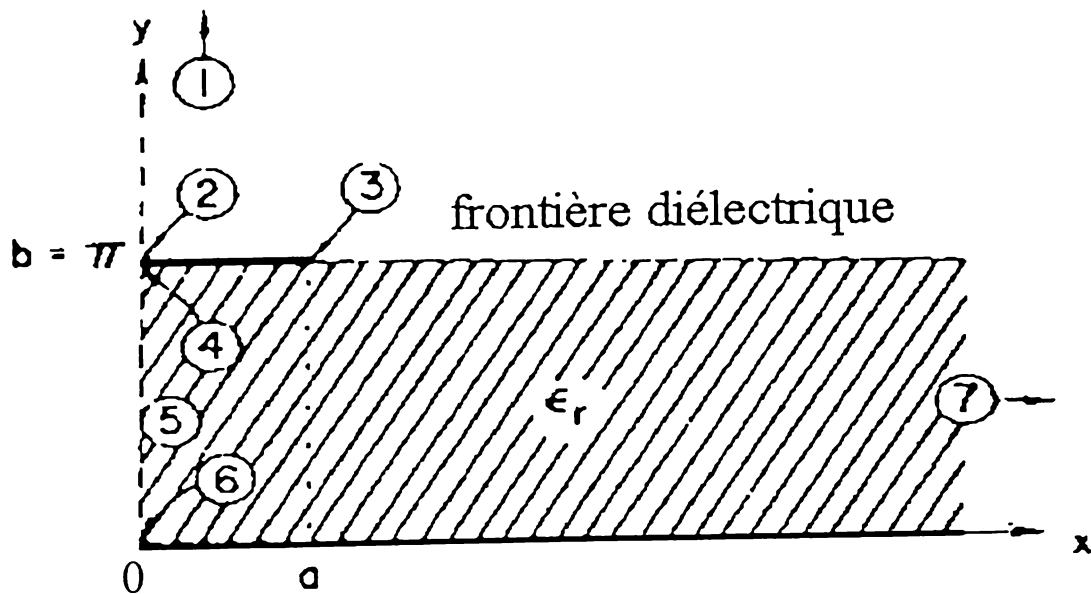


Figure 1.2: Section droite d'une ligne de transmission micro-ruban d'après [You74], plan z , $x + jy = z$.

1.3 Méthode de la transformation conforme modifiée

La méthode de la transformation conforme (en plan complexe) a été élaborée à l'origine pour des lignes ruban. Une méthode modifiée a été proposée par Wheeler [Whe65]. Wheeler a introduit le facteur de remplissage qui est un concept pratique pour décrire les paramètres d'une ligne micro-ruban.

La partie droite de la section droite d'une ligne micro-ruban est montrée dans la figure 1.2

Un mur magnétique est placé le long de l'axe de symétrie y . L'épaisseur du ruban est considérée comme infiniment petite. Dans la première étape de la technique de Wheeler on applique une transformation conforme de telle manière qu'une nouvelle géométrie plus simple soit obtenue. Pour un ruban large, la transformation est donnée par

$$z = j\pi + d \tanh \frac{1}{2} z' - z' \quad (1.8)$$

avec $d \sim g'$ pour $g'/2 \gg 1$ où g' est la largeur effective des couches parallèles dans le plan transformé montré dans la figure 1.3.

La transformation de z à z' transforme la ligne en une structure de couches parallèles confinée par deux murs magnétiques verticaux ($x' = 0$ et $x' = g'$). De plus, l'interface diélectrique-air planaire dans la figure 1.2 se transforme en une surface courbée 3-7 dans la figure 1.3(a). Puisqu'une solution analytique exacte est difficile à obtenir pour ce problème avec une surface courbée, des approximations supplémentaires sont nécessaires. Nous approchons la surface $\pi s'$ inclus par la courbe 3-7 et les lignes 3-3' et 3'-7 par deux rectangles avec des surfaces $\pi s''$ et $\pi(s' - s'')$ montrées dans la figure 1.3(b). La surface $\pi s''$ ajoute s'' à la largeur de la région à droite ($a' \leq x' \leq g'$) et est appelée alors la "partie parallèle". L'autre surface $\pi(s' - s'')$ est en série avec la région d'espace libre πs_0 . Nous combinons alors ces deux effets afin d'approcher la région originale qui était remplie en partie. La région entourée par les points 1 2 3 et 3' dans la figure 1.3(a) est alors approchée par la région entourée par les points 1 2 3 et 3' dans la figure 1.3(c) constituée d'un diélectrique de largeur s . Le calcul de la capacité est alors simple du fait de la nature planaire du remplissage diélectrique.

La largeur effective s peut-être exprimée comme

$$s = s'' + (s' - s'')/\epsilon_r \quad (1.9)$$

Le facteur de remplissage ("filling factor") peut être défini comme

$$q = (g' - a' + s)/g' \quad (1.10)$$

La constante diélectrique effective peut alors être exprimée au moyen du facteur de remplissage par:

$$\epsilon_{\text{eff}} = (1 - q) + q\epsilon_r \quad (1.11)$$

La capacité linéique est alors donnée par $C = \epsilon_{\text{eff}} C_0$ où C_0 est la capacité linéique de la ligne sans substrat. Le problème est alors réduit à la recherche de valeurs approximatives pour s' , s'' ou q .

Une expression approximative pour un ruban de grande largeur (largeur du ruban grande devant l'épaisseur du substrat) a été donnée par Wheeler:

$$\begin{aligned} s' &= 0.732 [a' - \cosh^{-1}(0.358 \cosh a' + 0.953)] \\ s'' &= 0.386 - 1/2(d - 1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

La constante diélectrique effective peut alors être calculée au moyen de l'Eqn. 1.12 et des Eqs. 1.9, 1.10 et 1.11.

Dans le cas d'un ruban de petite largeur (largeur du ruban petite devant l'épaisseur du substrat) la constante diélectrique effective est donnée d'après Wheeler par:

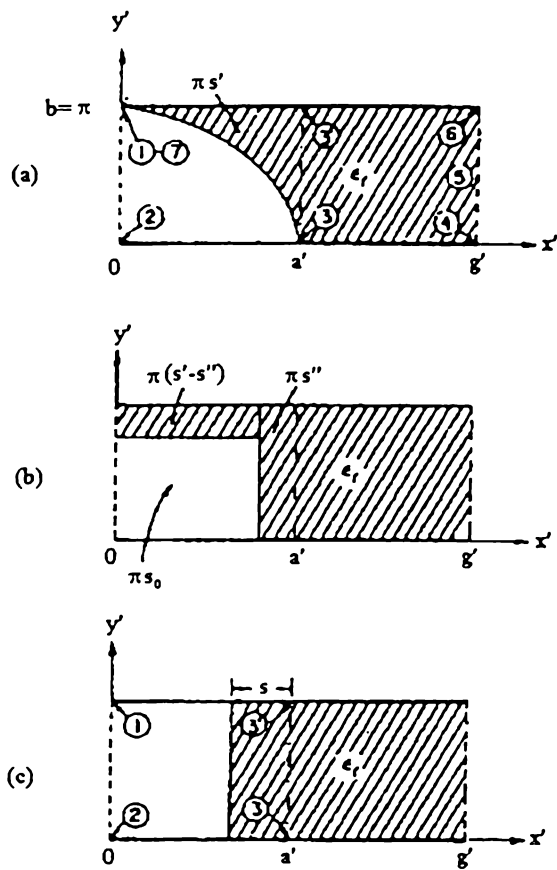


Figure 1.3: Section droite d'une ligne de transmission micro-ruban d'après [You74], plan transformé z' , $x' + jy' = z'$.

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2h'} \left[\ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{4}{\pi} \right] \quad (1.13)$$

avec

$$h' \approx \ln \frac{4b}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

où a est la mi-largeur du ruban et b est l'épaisseur du substrat.

Wheeler donne également les expressions pour les impédances caractéristiques Z_0 dans le cas d'un ruban de grande largeur:

$$Z_0 = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} \left[\frac{2a}{b} + 0.883 + \frac{\epsilon_r + 1}{\pi \epsilon_r} \left\{ \ln \left(\frac{a}{b} + 0.94 \right) + 1.451 \right\} + 0.165 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r^2} \right]^{-1} \quad (1.14)$$

et dans le cas d'un ruban de petite largeur:

$$Z_0 = \frac{377}{2\pi \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}}} \left[\ln \left(\frac{4b}{a} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left\{ \ln \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{4}{\pi} \right\} \right] \quad (1.15)$$

Afin de dimensionner des lignes micro-ruban, on s'intéresse en pratique aux valeurs b/a pour une impédance caractéristique donnée. Wheeler donne les valeurs b/a dans le cas d'un ruban de grande largeur:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pi &= \frac{377\pi}{2\sqrt{\epsilon_r Z_0}} - 1 - \ln \left(\frac{377\pi}{\sqrt{\epsilon_r Z_0}} - 1 \right) \\ &+ \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left[\ln \left(\frac{377\pi}{2\sqrt{\epsilon_r Z_0}} - 1 \right) + 0.293 - \frac{0.517}{\epsilon_r} \right] \end{aligned}$$

et dans le cas d'un ruban de petite largeur:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{4} \exp(h') - \frac{1}{2} \exp(-h') \quad (1.16)$$

où

$$h' = \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} \frac{Z_0}{60} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.226 + \frac{0.120}{\epsilon_r} \right) \quad (1.17)$$

Des représentations graphiques pour l'impédance caractéristique et la longueur d'onde pour le mode principal sont données dans les figures 1.4 et 1.5.

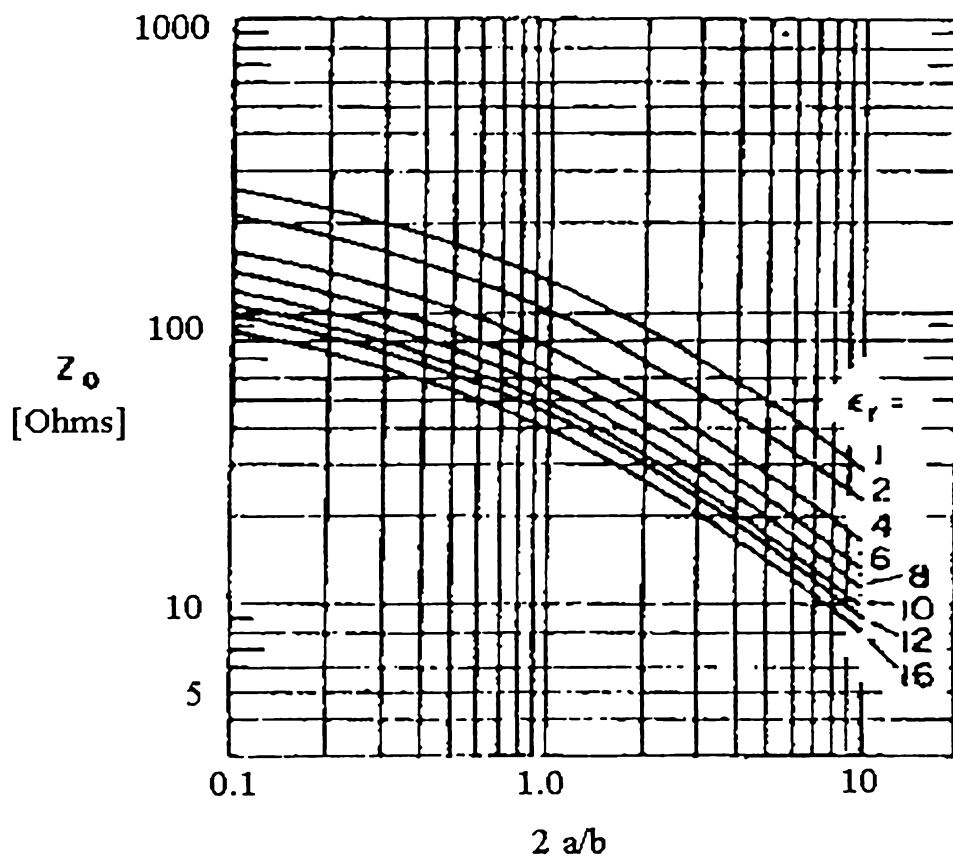


Figure 1.4: Impédance d'une ligne micro-ruban en fonction de la largeur du ruban et de l'épaisseur du substrat, Sobol [Sob71], d'après [You74].

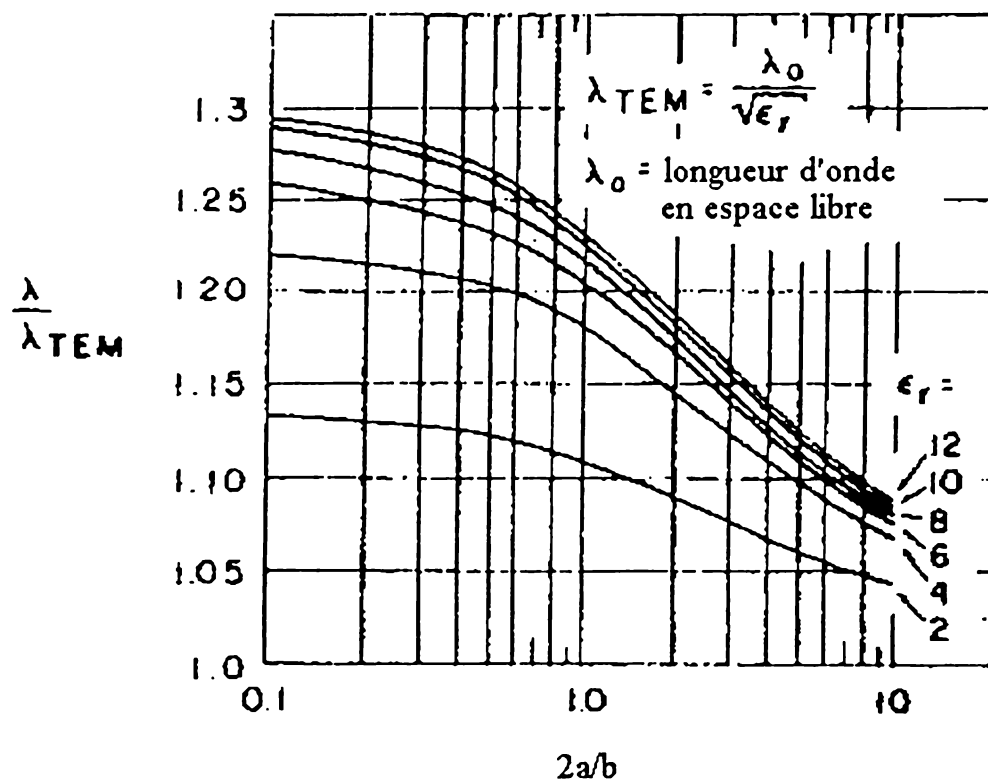


Figure 1.5: Longueur normalisée de l'onde guidée dans une ligne micro-ruban en fonction de la largeur du ruban et de l'épaisseur du substrat, Sobol [Sob71], d'après [You74].

1.4 Méthode des différences finies et méthode de relaxation

On peut déterminer la distribution des champs dans la section droite directement au moyen d'une méthode à différences finies. La distribution des champs elle-même permet ensuite de calculer la capacité linéique C' de la ligne. Les paramètres Z et β peuvent alors être obtenus avec l'approximation TEM vue dans la Section précédente.

Le principe de base de la méthode des différences finies consiste en une discrétisation de la distribution des champs. On suppose ici que les valeurs pour les potentiels sont connues seulement sur les points d'intersection d'une grille 2D. Les potentiels peuvent être déterminés au moyen de la méthode de relaxation en utilisant des approximations successives comme suit: Considérons une grille large où chaque point représente une valeur pour le potentiel $\phi(x, y)$. Le potentiel au point A est noté ϕ_A . Nous développons le potentiel ϕ autour du point A en une série de Taylor afin de trouver les potentiels aux points voisins B , C , D et E (voir figure 1.6). Les valeurs pour le potentiel en ces points sont

$$\begin{aligned}
 \phi_B &= \phi_A + h\partial_x\phi_A + \frac{1}{2!}h^2\partial_x^2\phi_A + \frac{1}{3!}h^3\partial_x^3\phi_A + O(h^4) \\
 \phi_C &= \phi_A - h\partial_y\phi_A + \frac{1}{2!}h^2\partial_y^2\phi_A - \frac{1}{3!}h^3\partial_y^3\phi_A + O(h^4) \\
 \phi_D &= \phi_A - h\partial_x\phi_A + \frac{1}{2!}h^2\partial_x^2\phi_A - \frac{1}{3!}h^3\partial_x^3\phi_A + O(h^4) \\
 \phi_E &= \phi_A + h\partial_y\phi_A + \frac{1}{2!}h^2\partial_y^2\phi_A + \frac{1}{3!}h^3\partial_y^3\phi_A + O(h^4)
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $O(h^4)$ contient les termes en h^4 et au dessus. L'addition des expressions précédentes donne une équation pour le potentiel ϕ

$$\phi_B + \phi_C + \phi_D + \phi_E = 4\phi_A + h^2 [\partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi]_A + O(h^4) \tag{1.19}$$

Cette équation peut maintenant être utilisée pour résoudre l'équation de Laplace du potentiel ϕ dans la section droite

$$\partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi = 0 \tag{1.20}$$

En substituant l'Eqn. 1.20 dans l'Eqn. 1.19 on obtient (en négligeant les termes d'ordre $O(h^4)$):

$$\phi_A = \frac{1}{4}(\phi_B + \phi_C + \phi_D + \phi_E) \tag{1.21}$$

La méthode de relaxation consiste à déterminer au pas d'itération $n + 1$ pour chaque point de la grille l'erreur résiduelle (le résidu) pour le pas n au point A

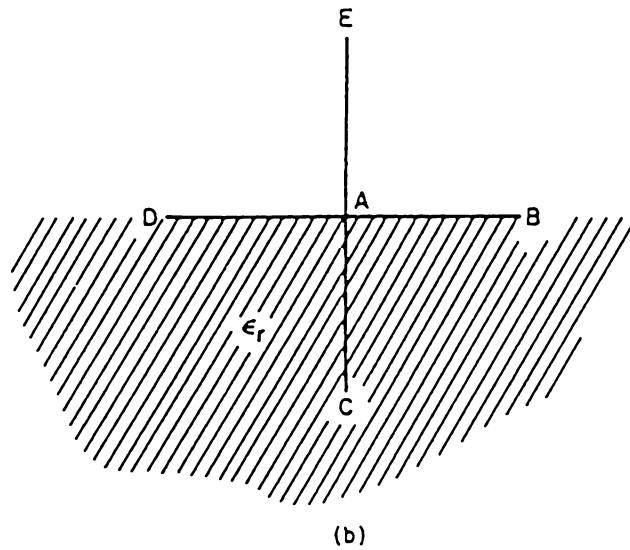
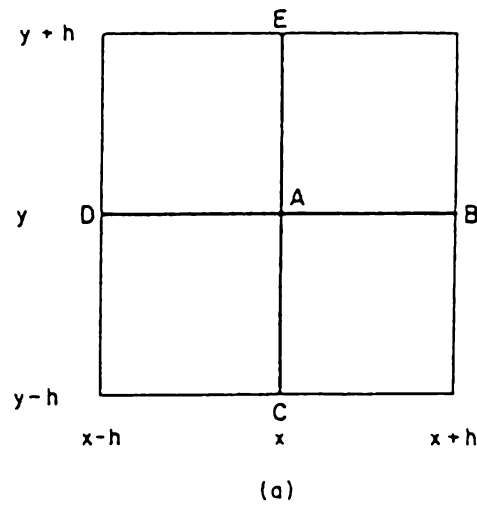


Figure 1.6: *Points d'une grille pour une approximation à différences finies d'après [You74]. (a) dans l'air et (b) à une surface diélectrique-air*

$$\Gamma_A^n = \phi_A^n - \frac{1}{4}(\phi_B^n + \phi_C^n + \phi_D^n + \phi_E^n) \quad (1.22)$$

et à corriger la valeur du potentiel ϕ au point A en utilisant le résidu comme suit

$$\phi_A^{n+1} = \phi_A^n - \alpha \Gamma_A^n \quad (1.23)$$

Le facteur α s'appelle le facteur d'accélération. Si $0 < \alpha < 1$ on parle d'une méthode de sous-relaxation, si $1 < \alpha < 2$ on parle d'une méthode de sur-relaxation. On trouve que la convergence est la plus rapide pour une sur-relaxation (successive over-relaxation ou SOR) [Gre65].

L'expression pour le potentiel demande une correction lorsqu'on se trouve aux interfaces diélectrique-air comme le montre la figure 1.6(b). L'équation 1.21 doit y être remplacée par

$$\phi_A = \frac{1}{4}(\phi_B + \phi_D) + \frac{1}{2(\epsilon_r + 1)}(\epsilon_r \phi_C + \phi_E) \quad (1.24)$$

Des équations pour des points aux interfaces diverses ont été données par Green [Gre65]. Pour une discussion générale nous renvoyons à Wexler [Wex69].

A partir du potentiel on trouve aisément la capacité linéique. Pour cela on utilise la relation pour la charge linéique Q (en utilisant la loi de Gauss en 2D)

$$Q = \int_V \rho dl = \int_L \epsilon_r \partial_n \phi dl \quad (1.25)$$

où L est un contour entourant le ruban, n est la direction normale vers l'extérieur et ϵ_r est égale à un si le point se trouve dans l'air ou égale à la permittivité électrique si le point se trouve dans le diélectrique. La valeur $\partial_n \phi$ peut être obtenue le long du contour pour chaque point P en prenant la valeur à gauche ϕ_A et la valeur à droite ϕ_B à la distance h comme

$$\partial_n \phi_P = (\phi_B - \phi_A)/2h$$

La capacité linéique est alors obtenue à partir de la charge linéique Q par:

$$C = Q/V_t$$

où V_t est le potentiel entre le ruban et la masse. Afin d'obtenir l'impédance caractéristique et la constante de phase β il faut refaire le calcul sans diélectrique afin de déterminer la capacité linéique C_0 .

La figure 1.7 montre quelques exemples d'impédances caractéristiques calculées pour une ligne micro-ruban enfermée dans un boîtier.

Commentaires:

1. La méthode des différences finies peut être également établie pour les champs électriques et magnétiques. Au lieu de simuler l'équation statique de Poisson il s'agit alors de trouver des schémas qui simulent les équations de Maxwell. Ces méthodes sont -- contrairement à la méthode présentée ici -- dynamiques, c'est à dire une iteration correspond réellement à un pas de temps. Les méthodes dynamiques donnent accès direct à l'impédance et -- toujours sous l'approximation TEM -- à la capacité linéique et à la constante de phase β .
2. Les équations du type 1.21 et 1.24 peuvent être rassemblées afin de les écrire sous forme matricielle $A_{mn}\phi_m = b_n$ (ϕ_m est le vecteur contenant le potentiel ϕ aux m points de la grille). Il existent des méthodes autres que la méthode de relaxation, par exemple des méthodes d'inversion de la matrice A_{nm} (la littérature parle de "méthodes directes"), des méthodes de séparation des opérateurs ("operator-splitting") et des méthodes de changement de direction ("alternating-direction" ou ADI) [Pre86].

1.5 Méthode variationnelle dans le domaine fréquentiel

Une méthode qui utilise une approche variationnelle dans le domaine des fréquences spatiales (espace du vecteur d'onde k) était proposée par Yamashita et Mitra 1968 [Yam68]. La technique demande -- p. ex. par rapport à la méthode de relaxation -- comparativement peu d'espace mémoire et de temps de calcul.

Nous allons considérer la ligne micro-ruban blindée avec deux substrats différents montrée dans la figure 1.8. La ligne simple (Fig. 1.1(a)) peut être obtenue à partir de cette structure avec $\epsilon_1^* = \epsilon_2^*, \epsilon_3^* = 1$ et $d \rightarrow \infty$, où $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*$ et ϵ_3^* sont les constantes diélectriques relatives. Nous allons calculer la capacité linéique C pour cette structure.

Nous partons de l'équation de Poisson pour le potentiel dans la section droite du ruban en supposant que le ruban est infiniment mince et en introduisant un espace de largeur p entre le ruban et la couche diélectrique. La structure de la Fig. 1.8 est obtenue pour $\lim_{p \rightarrow 0}$ après application des conditions aux limites. Cette modification permet de séparer les conditions aux limites à l'interface diélectrique de l'équation de continuité à $y = h + s$. L'équation de Poisson s'écrit

$$\nabla_{\perp}^2 \phi(x, y) = -\epsilon^{-1} \rho(x) \delta(y - h - s - p) \quad (1.26)$$

où $\rho(x)$ est la distribution de la charge linéique dans le ruban, $\rho(x) = 0$ pour $|x| > w/2$, ϵ est la permittivité et δ est la fonction delta de Dirac.

La charge est distribuée le long du ruban. La relation entre la capacité C et la charge ρ est donnée par

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{Q^2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x) \phi(x, h + s) dx \quad (1.27)$$

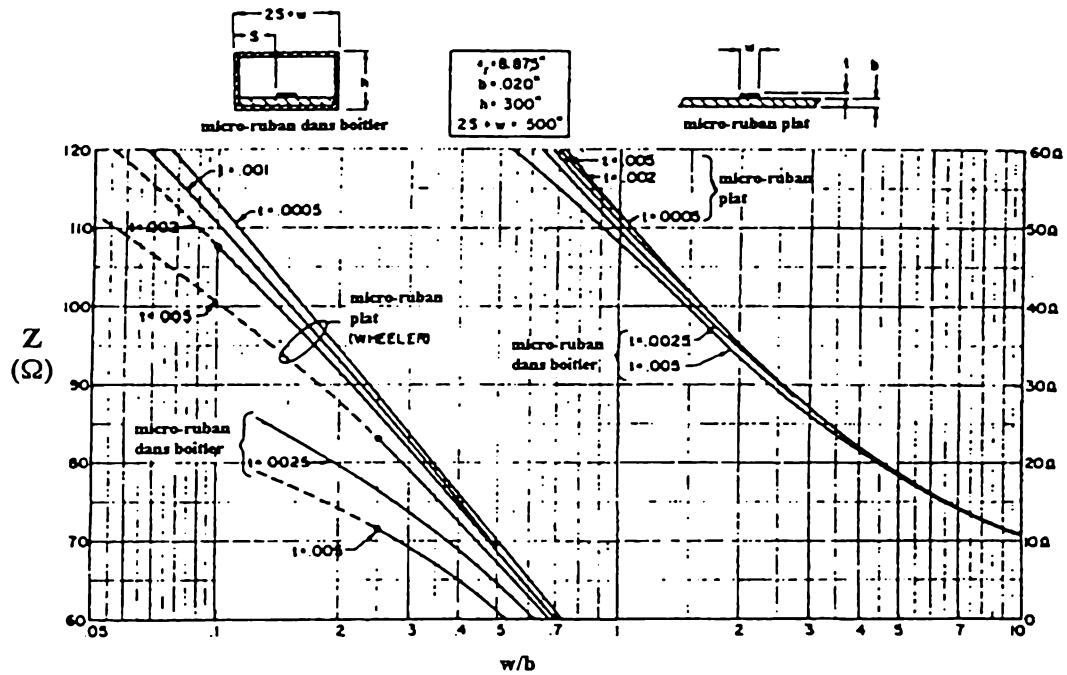


Figure 1.7: Impédance caractéristique d'une ligne micro-ruban calculée par Stinchelfer [Sti68] d'après [You74].

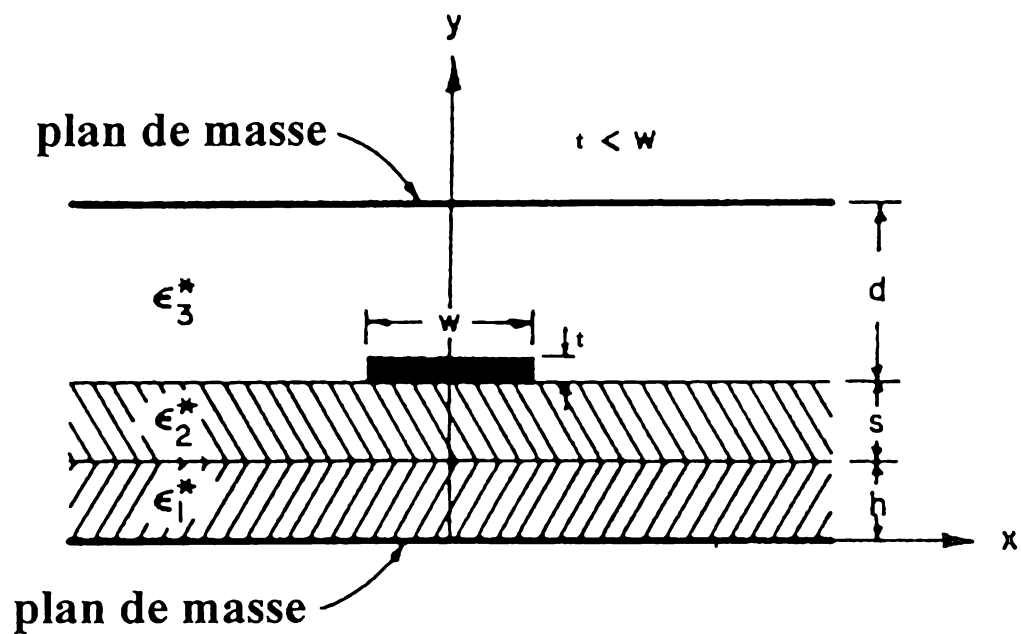


Figure 1.8: *Section droite d'une ligne de transmission micro-ruban blindée avec deux substrats différents d'après [You74].*

où $Q = \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x) dx$ est la charge linéique du ruban. L'équation 1.27 est une équation variationnelle qui détermine la distribution de la charge si on demande que la capacité devienne maximale. Afin de résoudre cette équation, nous devons connaître par avance le potentiel $\phi(x, y)$ pour $y = h + s$. Une solution de l'équation 1.26 pour $y = h + s$ est donnée par

$$\phi(x, h + s) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x') G(x, x'; h + s) dx' \quad (1.28)$$

où $G(x, x'; h + s)$ est la fonction de Green évaluée à $y = h + s$. La fonction de Green est déterminée par les conditions aux limites entre les différents milieux. Nous allons construire la fonction de Green en fréquentiel et nous allons ensuite résoudre l'équation de variation correspondant à l'Eqn. 1.27 en fréquentiel comme suit: Une transformation de Fourier entre l'espace x et l'espace k est donnée par $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(jkx) dx$. L'équation de Poisson Eqn. 1.26 s'écrit alors

$$\left[\frac{d}{dy^2} - k^2 \right] \tilde{\phi}(k, y) = -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\rho}(k) \delta(y - h - s - p) \quad (1.29)$$

où $\tilde{\phi}(k, y)$ est la transformée de Fourier de $\phi(x, y)$ et $\tilde{\rho}(k)$ est la transformée de Fourier de $\rho(x)$.

La représentation la plus générale pour $y \neq h + s + p$ est une combinaison de $\exp(ky)$ et $\exp(-ky)$. Dans le cas limite $d \rightarrow \infty$ il existe seulement $\exp(-ky)$ dans la région sans limites. Dans le cas $d \neq \infty$ les conditions aux interfaces pour les potentiels en espace k sont données par:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(k, 0) &= 0 \\ \tilde{\phi}(k, h + 0) &= \tilde{\phi}(k, h - 0) \\ \epsilon_2^* \frac{d}{dy} \tilde{\phi}(k, h + 0) &= \epsilon_1^* \frac{d}{dy} \tilde{\phi}(k, h - 0) \\ \tilde{\phi}(k, h + s + 0) &= \tilde{\phi}(k, h + s - 0) \\ \epsilon_3^* \frac{d}{dy} \tilde{\phi}(k, h + s + 0) &= \epsilon_2^* \frac{d}{dy} \tilde{\phi}(k, h + s - 0) \\ \tilde{\phi}(k, h + s + p + 0) &= \tilde{\phi}(k, h + s + p - 0) \\ \epsilon_3^* \frac{d}{dy} \tilde{\phi}(k, h + s + p + 0) &= \epsilon_3^* \frac{d}{dy} \tilde{\phi}(k, h + s + p - 0) - \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\rho}(k) \\ \tilde{\phi}(k, h + s + d + 0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ces équations déterminent les coefficients des potentiels dans leur représentation la plus générale. Pour $p \rightarrow 0$ la solution pour le potentiel sur le ruban est égale à l'équation 1.28 dans l'espace k

$$\bar{\phi}(k, h + s) = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\rho}(k) \bar{G}(k) \quad (1.31)$$

avec la transformée Fourier de la fonction de Green

$$\begin{aligned} \bar{G}(k) = & \frac{\epsilon_1^* \coth(|k|h) + \epsilon_2^* \coth(|k|s)}{|k| \{ \epsilon_1^* \coth(|k|h) [\epsilon_3^* \coth(|k|d) + \epsilon_2^* \coth(|k|s)] \\ & + \epsilon_2^* [\epsilon_2^* + \epsilon_3^* \coth(|k|d) \coth(|k|s)] \}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

La connaissance de $\bar{\phi}(k, h + s)$ nous permet de résoudre l'équation variationnelle 1.27 dans le domaine fréquentiel. En utilisant la relation de Parseval nous obtenons à partir de l'équation 1.27, une équation dans le domaine fréquentiel

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi Q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho}(k) \bar{\phi}(k, h + s) dk \quad (1.33)$$

Cette formule est numériquement plus facile à traiter que l'équation 1.27 puisque la fonction $\bar{\phi}$ est calculée par un simple produit de la charge avec la fonction de Green (cf. Eqn. 1.31), alors que le calcul de ϕ demande une convolution de la charge avec la fonction de Green (cf. Eqn. 1.28).

Jusqu'ici nous avons considéré un ruban infiniment mince. Il est relativement simple de généraliser le résultat pour une épaisseur petite en remplaçant $\bar{\phi}(k, h + s)$ par la valeur moyenne entre $\bar{\phi}(k, h + s)$ et $\bar{\phi}(k, h + s + t)$ où $\bar{\phi}(k, h + s + t)$ est le potentiel à $y = h + s + t$. Pour cela il faut supposer une variation du potentiel dans la direction de l'axe y . Mittra et Itho supposent une variation telle que

$$\bar{\phi}(k, h + s + t) = \frac{\sinh[|k|(d - t)]}{\sinh(|k|d)} \bar{\phi}(k, h + s) \quad (1.34)$$

La capacité linéique est alors

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi Q^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho} \bar{\phi}(k, h + s) \bar{h}(k) dk \quad (1.35)$$

où

$$\bar{h}(k) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sinh[|k|(d - t)]}{\sinh[|k|d]} \right\} \quad (1.36)$$

En introduisant le potentiel de l'Eqn. 1.31 dans l'Eqn. 1.36, on obtient la capacité linéique tenant compte de l'épaisseur du ruban

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\pi Q^2 \epsilon_0} \int_0^{\infty} [\bar{\rho}(k)]^2 \bar{G}(k) dk \quad (1.37)$$

La capacité sans substrat C_0 est obtenue pour $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = \epsilon_3^* = 1$ dans l'Eqn. 1.37.

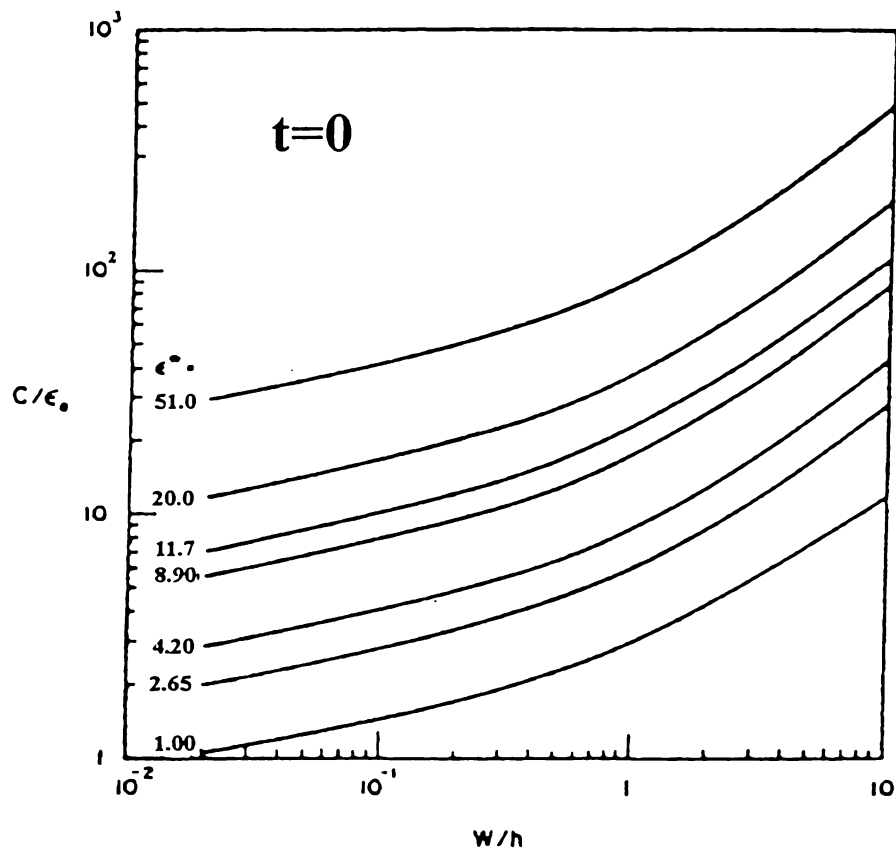


Figure 1.9: Capacité linéique vs. largeur et épaisseur du ruban. Yamashita et Mittra [Yam68] d'après [You74].

L'équation 1.37 détermine la distribution de la charge si on demande que la capacité devienne maximale. La nature variationnelle de cette équation introduit une erreur du deuxième ordre seulement pour une approximation de $\bar{\rho}(k)$. Le choix de $\bar{\rho}(k)$ tel que la valeur de C devienne maximale donne le résultat le plus proche de la valeur de la capacité. Plusieurs fonctions de test ont été utilisées par Yamashita et Mittra [Yam68] et Yamashita [Yam68b]. Des résultats numériques ont été publiés pour deux fonctions de test différentes. Ce sont:

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \begin{cases} |x| & -w/2 \leq x \leq w/2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \\ \frac{\bar{\rho}(k)}{Q} &= \frac{2 \sin(kw/2)}{kw/2} - \left[\frac{\sin(kw/4)}{kw/4} \right]^2\end{aligned}\quad (1.38)$$

et

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \begin{cases} 1 + |2x/w|^3 & -w/2 \leq x \leq w/2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \\ \frac{\bar{\rho}(k)}{Q} &= \frac{5 \sin(kw/2)}{8 \frac{kw}{2}} + \frac{12}{5(kw/2)^2} \\ &\times \left\{ \cos(kw/2) - \frac{2 \sin(kw/2)}{kw/2} \frac{\sin^2(kw/4)}{(kw/4)^2} \right\}\end{aligned}\quad (1.39)$$

Les figures 1.9 à 1.13 présentent les résultats numériques pour les lignes micro-ruban où $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = \epsilon^*$, $\epsilon_3^* = 1$ et $d \rightarrow \infty$. La fonction de test de l'Eqn. 1.38 a été utilisée pour calculer ces données. La figure 1.10 présente une comparaison des résultats obtenus en utilisant l'Eqn. 1.38 avec les résultats de Wheeler. De plus, une comparaison avec des résultats expérimentaux obtenus par Arditì [Ard55], Dukes [Duk56] et Hyltin [Hy165] est faite sur les figures 1.11 et 1.13. Des résultats numériques ont été calculés en utilisant l'Eqn. 1.39 pour fonction de test. Ils sont présentés sur les figures 1.14 à 1.17.

Avant de terminer la discussion nous allons présenter une procédure systématique pour la distribution de la charge. Cela est accompli via l'application de la méthode de Galerkin ou de la procédure de Rayleigh-Ritz dans le domaine de transformation [War71]. Nous décrivons la procédure ci-dessous.

Ecrivons d'abord l'équation 1.31 comme

$$\bar{\phi}_i(k, h+s) + \bar{\phi}_0(k, h+s) = (1/\epsilon_0) \bar{\rho}(k) \bar{g}(k) \quad (1.40)$$

où

$$\bar{\phi}_i(k, h+s) = \int_{-w/2}^{w/2} \phi(x, h+s) \exp(jkx) dx$$

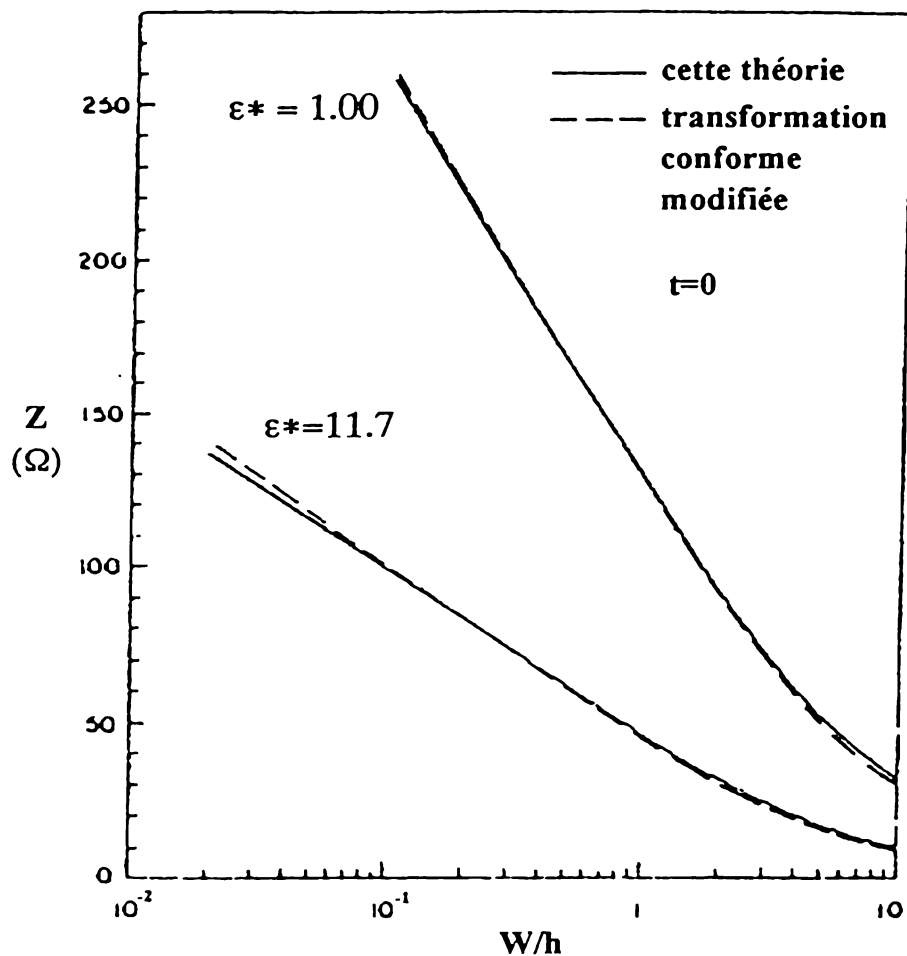


Figure 1.10: Résultats calculés pour l'impédance caractéristique et comparaison avec les résultats de Wheeler [Whe65], Yamashita et Mittra [Yam68] d'après [You74].

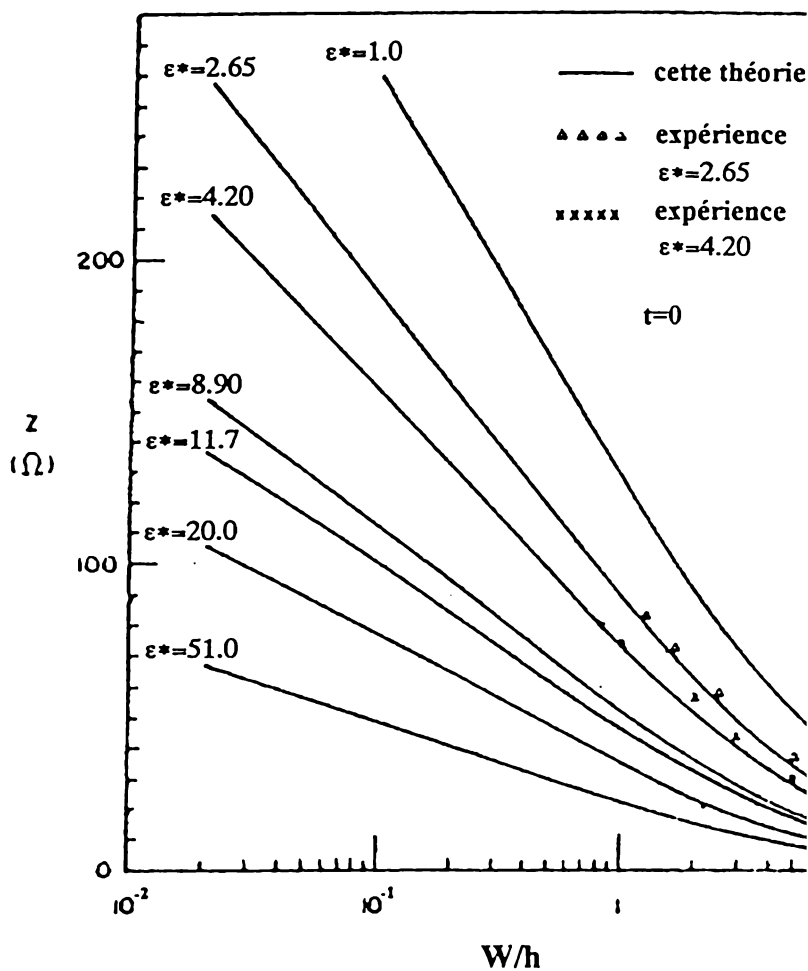


Figure 1.11:
Impédances caractéristiques théoriques et expérimentales pour diverses constantes diélectriques. Les résultats expérimentaux sont ceux de Dukès [Duk56] [$\triangle \triangle \triangle \triangle$] et ceux de Arditi [Ard55] [$\times \times \times \times$]. Yamashita et Mitra [Yam68] d'après [You74].

$$\bar{\phi}_0(k, h+s) = \int_{-\infty}^{-w/2} \phi(x, h+s) \exp(jkx) dx + \int_{w/2}^{\infty} \phi(x, h+s) \exp(jkx) dx \quad (1.41)$$

Notons que $\bar{\phi}_i$ est connu car $\phi(x, h+s)$ est donné pour $|x| < w/2$ (sur le ruban). Par contre, $\bar{\phi}_0$ n'est pas connu car $\phi(x, h+s)$ n'est pas connu pour $|x| > w/2$ (en dehors du ruban).

Nous allons appliquer maintenant la *méthode de Galerkin* afin de déterminer la distribution de la charge $\bar{\rho}(k)$ dans l'équation 1.40. Pour cela nous développons $\bar{\rho}(k)$ en fonctions de base $\bar{\rho}_n(k)$ avec des coefficients ("les poids")

$$\bar{\rho}(k) = \sum_{n=1}^N c_n \bar{\rho}_n(k) \quad (1.42)$$

Nous choisissons des fonctions de base $\bar{\rho}_n(k)$ telles que leurs transformées inverses ont un support limité dans le domaine spatial, c'est à dire

$$\rho_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho}_n(k) \exp(-jkx) dk, \quad |x| > w/2 \quad (1.43)$$

Ensuite, l'Eqn. 1.42 est substituée dans l'Eqn. 1.40 et le produit scalaire avec $\bar{\rho}_n(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ est appliqué des deux cotés de l'équation qui en résulte.

Cela mène à une équation matricielle de la forme

$$b_m = \sum_{n=1}^N K_{mn} c_n \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (1.44)$$

où

$$\begin{aligned} b_m &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho}_m(k) \bar{\phi}_i(k, h+s) dk \\ &= 2\pi \int_{-w/2}^{w/2} \rho_m(x) \phi_i(x, h+s) dx \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$K_{mn} = (1/\epsilon_0) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho}_m(k) \bar{g}(k) \bar{\rho}_n(k) dk \quad (1.46)$$

Ici, les éléments b_m ont été calculés en utilisant le théorème de Parseval. L'application de ce théorème aide à éliminer l'inconnue $\bar{\phi}_0$ qui n'est plus présente dans l'Eqn. 1.45. L'intégrale du produit $\bar{\phi}_0$ et $\bar{\rho}_m$ ne contribue pas à l'équation 1.45 car la transformée inverse de ces fonctions est non-nulle seulement dans des régions complémentaires, ainsi leur produit est nul.

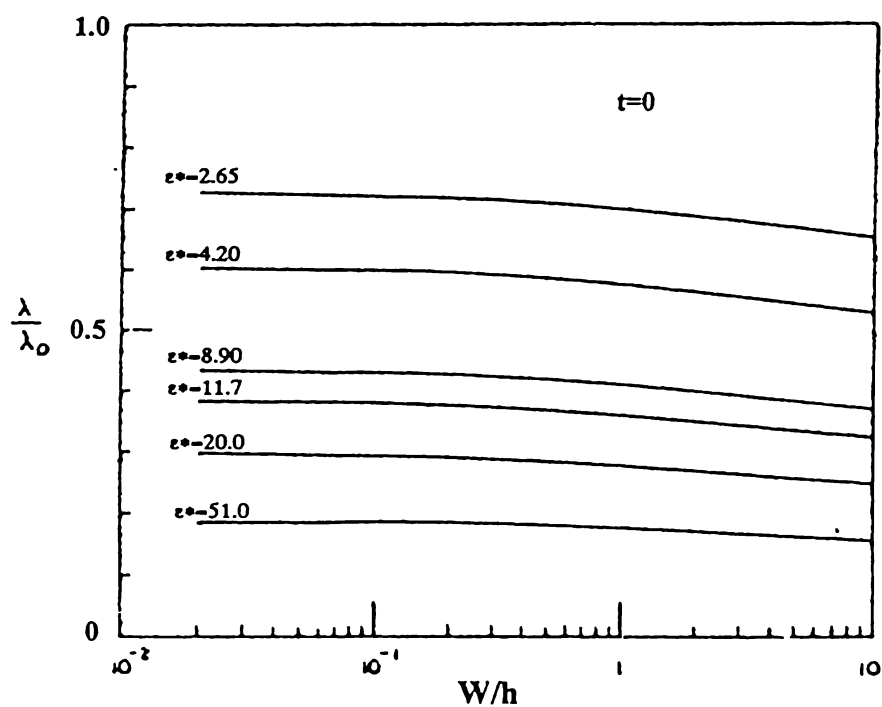


Figure 1.12: *Longueur d'onde guidée en fonction des largeur et épaisseur du ruban. Yamashita et Mittra [Yam68] d'après [You74].*

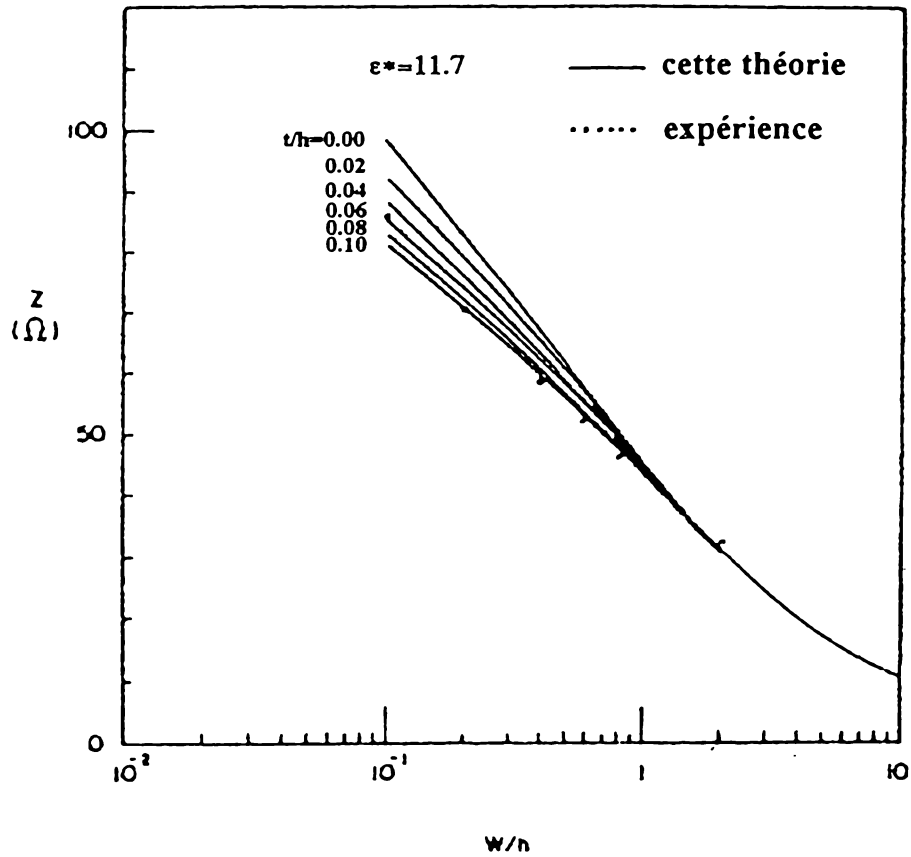


Figure 1.13: Résultats théoriques et expérimentaux concernant l'effet de l'épaisseur du ruban sur l'impédance caractéristique avec $\epsilon^* = 11.7$. Les résultats expérimentaux sont ceux de Hylltin [Hyl65]. Yamashita et Mittra [Yam68] d'après [You74].

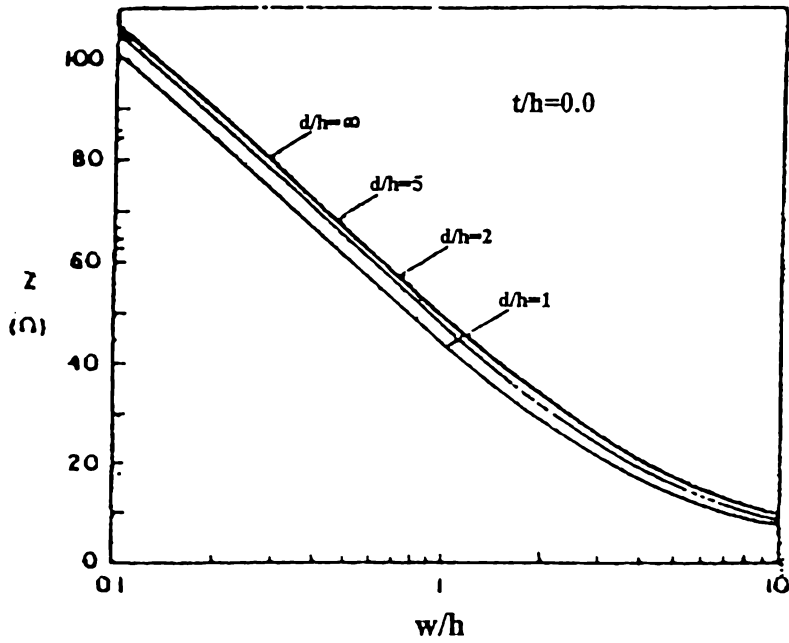


Figure 1.14: Impédance caractéristique calculée. $\epsilon_1^* = 9.9$ (saphir); $\epsilon_3^* = 1.0$; $s = 0$; $t = 0$. Yamashita [Yam68b] d'après [You74].

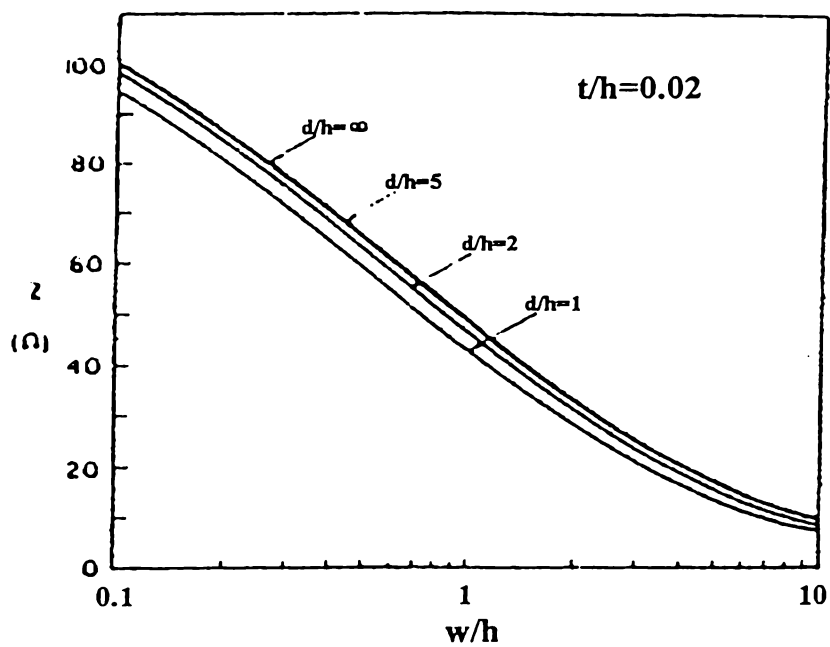


Figure 1.15: Impédance caractéristique calculée. $\epsilon_1^* = 9.9$ (saphir); $\epsilon_3^* = 1.0$; $s = 0$; $t = 0.02h$. Yamashita [Yam68b] d'après [You74].

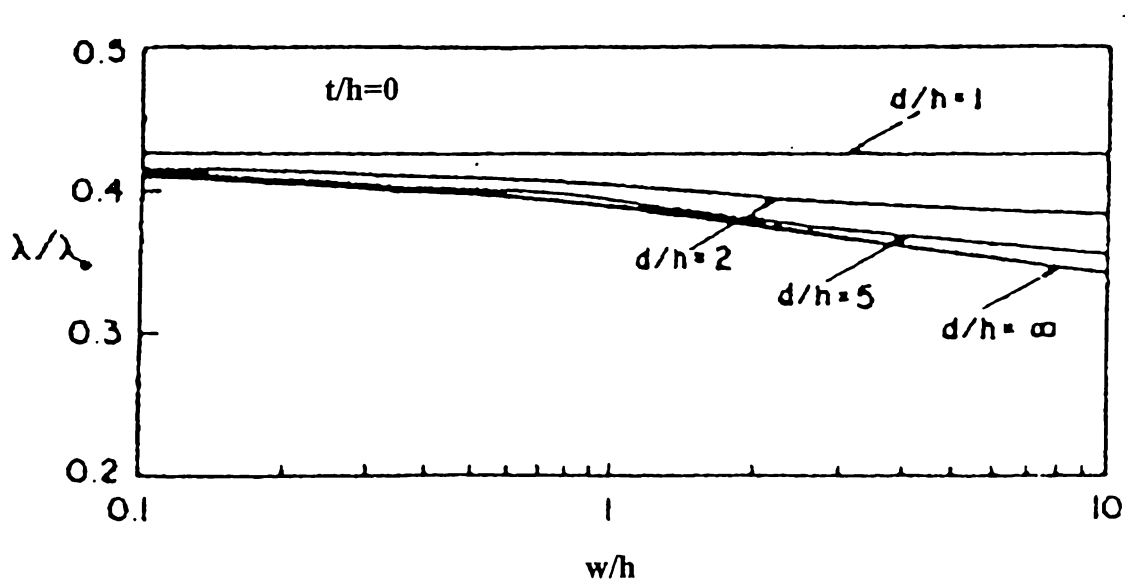


Figure 1.16: *Longueur d'onde guidée calculée.* $\epsilon_1^* = 9.9$ (saphir); $\epsilon_3^* = 1.0$; $s = 0$; $t = 0$. Yamashita [Yam68b] d'après [You74].

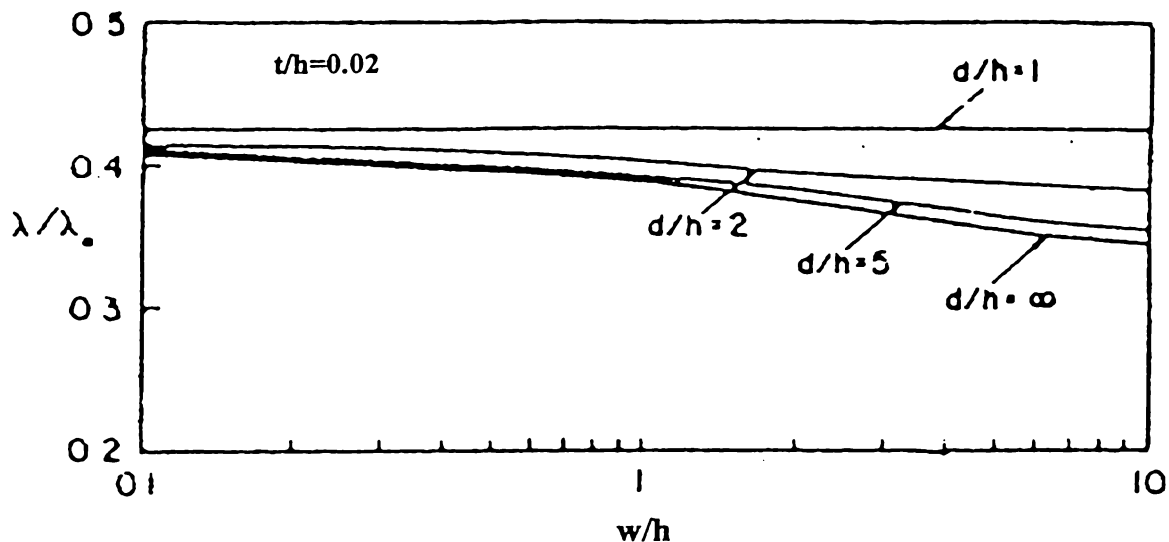


Figure 1.17: Longueur d'onde guidée calculée. $\epsilon_1^* = 9.9$ (saphir); $\epsilon_3^* = 1.0$; $s = 0$; $t = 0.02h$. Yamashita [Yam68b] d'après [You74].

Afin de déterminer la distribution de la charge, on cherche maintenant à résoudre l'équation 1.44, c'est à dire à déterminer les coefficients c_n . La capacité linéique est alors obtenue en fonction des coefficients c_n en utilisant la formule

$$C = \frac{1}{V_t} \sum_{n=1}^N c_n \int_{-w/2}^{w/2} \rho_n(x) dx \quad (1.47)$$

où V_t est le potentiel entre le ruban et la masse. L'équation 1.47 donne une valeur stationnaire de C et la précision du résultat peut être améliorée en choisissant N suffisamment grand. L'expérience montre que l'amélioration de la précision est en général petite après une amélioration initiale si N est augmenté à partir d'une valeur très petite.

1.6 Méthode des équations intégrales

Jusqu'à présent nous avons discuté trois techniques différentes pour déterminer les caractéristiques d'une ligne micro-ruban. Deux de ces méthodes, la méthode de transformation conforme et la méthode variationnelle sont utilisées surtout lorsque l'épaisseur du ruban est faible. Pourtant, dans certaines applications pratiques de circuits micro-ondes, l'effet d'une épaisseur finie du ruban ne peut pas être négligé.

Puisque la méthode de relaxation est en principe une méthode numérique, elle peut être appliquée au cas d'une épaisseur quelconque du ruban. Le principal désavantage de cette méthode reste néanmoins que sa convergence est plutôt lente.

Nous allons présenter dans la suite une méthode basée sur des équations intégrales pour résoudre le problème de l'épaisseur du ruban d'une façon efficace. Considérons la section droite d'une ligne de transmission micro-ruban montrée sur la figure 1.18. Le potentiel est déterminé par l'équation de Poisson:

$$\nabla_t^2 \phi(x, y) = -(1/\epsilon) \rho(x, y) \quad (1.48)$$

Une fonction de Green $G(x, y; x_0, y_0)$ est donnée par:

$$\nabla_t^2 G(x, y; x_0, y_0) = -(1/\epsilon) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (1.49)$$

où G satisfait la même condition aux limites et condition de continuité sauf pour la condition de source. La fonction de Green est le potentiel au point (x, y) dû à une unité de charge au point (x_0, y_0) . En appliquant le principe de superposition, le potentiel ϕ dans l'Eqn. 1.48 est donné par

$$\phi(x, y) = \int G(x, y; x_0, y_0) \rho(x_0, y_0) dl_0 \quad (1.50)$$

où l'intégrale est définie sur la surface du conducteur.

Nous allons construire la fonction de Green comme suit. D'abord, nous développons la fonction de Green en une série de Fourier dans la direction de la coordonnée x . L'équation à dérivées partielles (Eqn. 1.49) est alors réduite à un ensemble d'équations différentielles ordinaires de la variable y . La solution de chaque équation différentielle ordinaire dans toutes les régions du diélectrique est une combinaison linéaire de fonctions hyperboliques. On applique les conditions aux limites et les conditions d'interface à chacune de ces solutions et on détermine ainsi les amplitudes. En substituant ces coefficients dans l'équation 1.49 on détermine ainsi la fonction de Green. Si la source est localisée selon $h_1 + h_2 \leq y_0 \leq b$ et la condition à la limite du conducteur extérieur est $G = 0$, l'expression pour la fonction de Green est donnée [Yam70] [Yam71] par

$$G(x, y; x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi\epsilon_3} \frac{\Delta_n(y_0 - h_1 - h_2)}{\Delta_n(h_3)} \sinh \left[\frac{n\pi(b - y)}{a} \right]$$

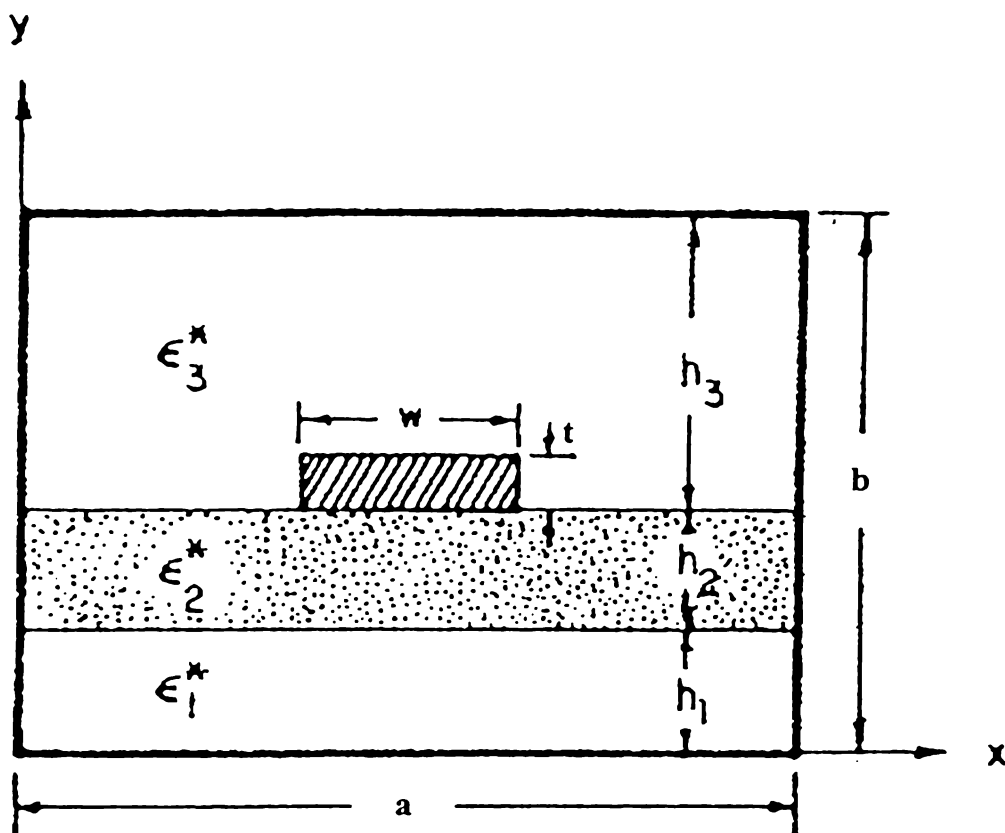


Figure 1.18: *Section droite d'une ligne de transmission micro-ruban avec une épaisseur finie et avec plusieurs couches diélectriques placées dans une cavité d'après [You74].*

$$\begin{aligned}
& \times \sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad h_1 - h_2 \leq y_0 \leq y \leq b \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi\epsilon_3^*} \frac{\Delta_n(y_0 - h_1 - h_2)}{\Delta_n(h_3)} \sinh\left[\frac{n\pi(b-y)}{a}\right] \\
& \times \sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad h_1 + h_2 \leq y \leq y_0 \leq b
\end{aligned} \tag{1.51}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \epsilon_1^* \epsilon_2^* \cosh(n\pi h_1/a) \cosh(n\pi h_2/a) \sinh(n\pi y/a) \\
&= \epsilon_2^* \epsilon_3^* \sinh(n\pi h_1/a) \cosh(n\pi h_2/a) \cosh(n\pi y/a) \\
&= \epsilon_3^* \epsilon_1^* \cosh(n\pi h_1/a) \sinh(n\pi h_2/a) \cosh(n\pi y/a) \\
&= \epsilon_2^* \epsilon_2^* \sinh(n\pi h_1/a) \sinh(n\pi h_2/a) \sinh(n\pi y/a)
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Les représentations pour les fonctions de Green dans les régions diélectriques ne contribuent pas, puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de charges dans les diélectriques.

L'équation pour le potentiel Eqn. 1.50 peut alors être transformée en une forme matricielle par la méthode de discrétisation conventionnelle. Les résultats obtenus en résolvant cette équation matricielle sont présentés dans la figure 1.19.

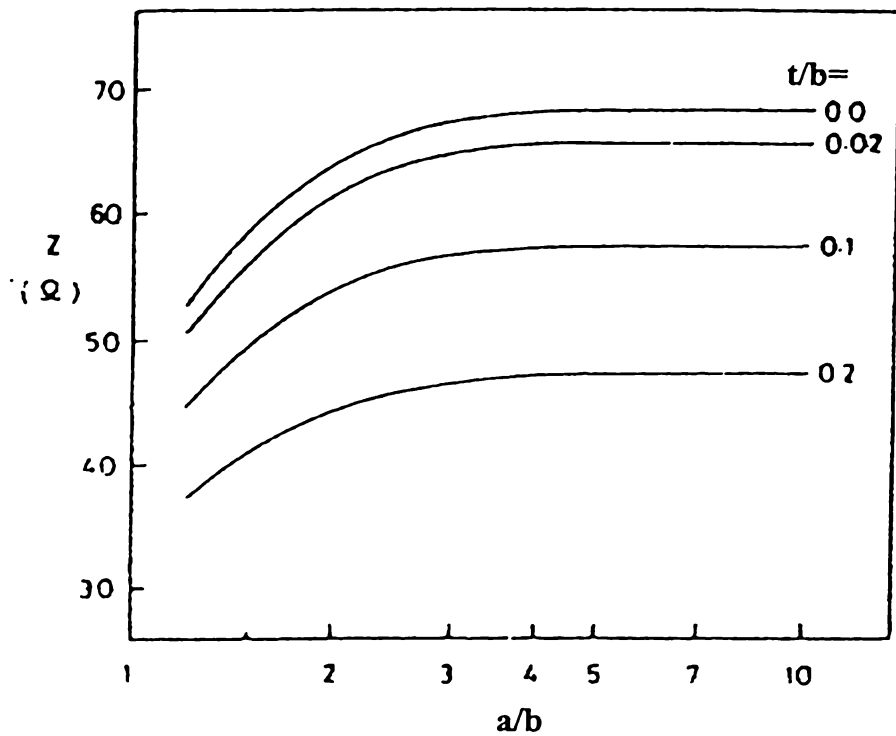


Figure 1.19: Impédance caractéristique d'une ligne micro-ruban montrée dans la figure 1.18; $\epsilon_1^* = \epsilon_3^* = 1$, $\epsilon_2^* = 9.35$, $h_1 = h_3 = 0.4b$, $h_2 = 0.2b$, $w = 0.5b$. Yamashita [Yam71] d'après [You74].

Chapitre 2

La méthode TLM: Calcul des champs électromagnétiques en régime temporel

2.1 Introduction

Une méthode permettant de faire des simulations dans le domaine temporel des champs électromagnétiques est la méthode des lignes de transmission ou méthode TLM. Elle a été introduite par Johns et Beurle [Joh71]. La propagation des champs électromagnétiques y est simulée par la propagation et la répartition des impulsions dans une grille introduite sur ordinateur, constituée de lignes de transmission idéales et de noeuds aux intersections des lignes. La propagation des impulsions le long des lignes de transmission et la propagation des champs électromagnétiques en espace libre sont reliées par l'équivalence de l'équation des lignes sans pertes et l'équation d'onde. L'origine de la méthode TLM et ses améliorations, ses sources d'erreurs inhérentes, ses limitations et ses premières applications typiques sur des problèmes en micro-ondes sont rapportés dans un article de Hoefer [Hoe85]. Il existe aussi un livre sur la méthode TLM de Christopoulos [Chr95].

En 1986, Johns [Joh86] a présenté un noeud condensé symétrique (SCN) utile pour faire des calculs TLM en 3D. Ce noeud permet l'évaluation des 6 composantes du champ électromagnétique en un seul point pour chaque cellule d'une grille 3D introduite sur ordinateur. Sa matrice de répartition $[S]$ qui décrit la propagation des ondes dans des matériaux diélectriques et magnétiques peut être dérivée en considérant les équations de Maxwell en termes de conservation de charge et d'énergie [Joh87]. Le noeud est symétrique par rapport aux axes de la grille. Une extension de la matrice de répartition aux matériaux à pertes a été proposée par Naylor et Desai [Nay90]. Une comparaison du SCN aux noeuds utilisés précédemment pour la modélisation TLM en 3D et une revue des techniques utilisées pour

implanter des grilles non uniformes sont données par Saguet [Sag89].

Du à la discrétisation spatiale, la méthode TLM possède une dispersion intrinsèque: la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde et de la direction de propagation dans la grille introduite sur ordinateur. En plus de la dispersion dans des schémas discrets des modes parasites peuvent être générés [Tre82]. Les premiers calculs numériques sur la dispersion du SCN ont été faits par Allen et al. et ont indiqué que le SCN possède des propriétés de dispersion meilleures que celles du noeud étendu qui a été utilisé en modélisation TLM 3D à l'origine [All87].

En 1991, Nielsen et Hoefler ont proposé une expression analytique de la relation de dispersion du SCN [Nie91]. Leur formule est en concordance qualitative avec les résultats numériques de Allen et al. Ils impliquent que le SCN est clairement moins dispersif que le noeud étendu. Aujourd'hui, le SCN est devenue le noeud le plus utilisé afin de faire des simulations TLM 3D des champs électromagnétiques.

Dans la Section qui suit nous allons décrire le processus TLM en 1D, 2D et 3D et nous allons présenter le noeud actuel en 3D — le noeud condensé symétrique — dans le cas général d'un milieu diélectrique inhomogène à pertes avec un maillage parallélépipédique.

La simulation des champs électromagnétiques au moyen de la méthode TLM se fait comme avec les autres méthodes temporelles comparables (FD-TD, FEM-TD) dans le temps. Une réponse en fréquence peut être obtenue dans une bande de fréquence au dessous de la fréquence de coupure du maillage par une transformée de Fourier.

2.2 La solution des équations de Maxwell avec la méthode TLM en espace libre

Les équations de Maxwell en espace libre (sans charges ni courants) s'écrivent

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \partial_t \mathbf{E} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \partial_t \mathbf{H} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.4)$$

Le rotationnel de l'Eqn. 2.2 (en utilisant l'Eqn. 2.1) donne

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\epsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E}$$

D'autre part l'identité vectorielle

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

est valide. En utilisant l'Eqn. 2.4, nous obtenons pour le champ \mathbf{E}

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{E} \quad (2.5)$$

De même, la différentiation de l'Eqn. 2.2 par rapport au temps et le rotationnel de l'Eqn. 2.1 en utilisant l'Eqn. 2.3 donnent

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \epsilon \partial_t^2 \mathbf{H} \quad (2.6)$$

Les équations 2.5 et 2.6 s'appellent équations des ondes. Leurs solutions peuvent être construites explicitement pour certains systèmes de coordonnées (cf.[Jon86]). Nous cherchons un algorithme qui permette de résoudre les Eqs. 2.5 et 2.6 pour des conditions initiales quelconques. Pour cela, nous écrivons d'abord les Eqs. 2.2 et 2.1 sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} & +e\partial_y H_z & -e\partial_z H_y \\ -e\partial_x H_z & & +e\partial_z H_x \\ +e\partial_x H_y & -e\partial_y H_x & \\ & -m\partial_y E_z & +m\partial_z E_y \\ +m\partial_x E_z & & -m\partial_z E_x \\ -m\partial_x E_y & +m\partial_y E_x & \end{bmatrix} = \partial_t \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

où $e = 1/\epsilon$ et $m = 1/\mu$ sont les inverses de la perméabilité et de la permittivité.

Dans la suite nous voulons montrer que, en 1D, 2D et 3D, on peut résoudre les équations d'ondes par un processus de répartition et de propagation des ondes dans une grille introduite sur ordinateur. La méthode est connue sous le nom *méthode TLM* ou *Transmission Line Matrix Method*. Le processus sur grille peut être formulé en partant de l'équation 2.7.

2.2.1 Solution de l'équation de l'onde par le processus TLM en espace 1D

Considérons l'Eqn. 2.7 dans le sous-espace E_z, H_x , c'est à dire $E_x = E_y = H_y = H_z = 0$. L'Eqn. 2.7 devient alors $\partial_y A\mathbf{u} - \partial_t \mathbf{u} = 0$, soit

$$\partial_y \begin{bmatrix} & -e \\ -m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ H_x \end{bmatrix} = \partial_t \begin{bmatrix} E_z \\ H_x \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Les solutions de l'Eqn. 2.8 sont des solutions de l'équation d'onde en 1D

$$\partial_t^2 \begin{bmatrix} E_z \\ H_x \end{bmatrix} = em \partial_y^2 \begin{bmatrix} E_z \\ H_x \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

où $c = \sqrt{em}$ est la vitesse de propagation.

Afin de résoudre l'Eqn. 2.9 nous transformons la matrice dans l'Eqn. 2.8 en un système aux axes principaux. Pour cela, nous définissons les admittances et les impédances des ondes planes par

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{c}{e} = \frac{m}{c} = \sqrt{\frac{m}{e}} = \sqrt{\frac{c}{\mu}} = \frac{1}{Z} \\
Z &= \frac{e}{c} = \frac{c}{m} = \sqrt{\frac{e}{m}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{Y}
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont données par $\lambda_i = \{-\sqrt{em}, \sqrt{em}\}$. Les matrices pour la transformation sont R et L d'où $RL = LR = I$ et $\text{diag} \lambda_i = \Lambda = LAR$. Les colonnes de R sont les vecteurs propres des valeurs propres dans Λ . On trouve alors

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 1 & -Z \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y & -Y \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Le vecteur de champs \mathbf{u} dans le système aux axes principaux est donné par $\mathbf{v} = L\mathbf{u}$ ou

$$\begin{aligned}
v_1 &= E_z + ZH_x \\
v_2 &= E_z - ZH_x
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Les composantes du vecteur \mathbf{v} s'appellent les *invariants de Riemann* du problème. Si on interprète les champs électriques comme des tensions et les champs magnétiques comme des courants, les impulsions de Riemann correspondent aux ondes réduites ("power waves", Kurokawa 1965 [Kur65]).

Le processus TLM

Pour les invariants de Riemann on a donc l'équation

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \partial_y \mathbf{v} = 0 \quad (2.12)$$

Les solutions sont des ondes planes. Elles se propagent le long des axes principaux avec une vitesse égale aux valeurs propres. La forme générale de la solution est

$$v_i(y, t) = f_i(y - \lambda_i t)$$

où f_i sont des fonctions quelconques. Pour $y - \lambda_i t = \text{Const.}$ l'invariant de Riemann v_i est constant. On appelle les lignes définies par $\Gamma : y - \lambda_i t = \text{Const.}$ les directions caractéristiques. Une condition initiale pour \mathbf{v} détermine \mathbf{f} . En 1D on a

$$\mathbf{f}(y) = \mathbf{v}(y, 0) = L\mathbf{u}(y, 0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_z(y, 0) + ZH_x(y, 0) \\ E_z(y, 0) - ZH_x(y, 0) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Le premier invariant de Riemann $v_1 = 1/2(E_z(y, 0) + ZH_y(y, 0))$ est constant sur $\Gamma_{-y} : y + ct = \text{Const.}$ (valeur propre $-c$). L'invariant de Riemann v_1 se propage donc dans la direction négative de y . L'invariant $v_2 = 1/2(E_z(y, 0) - ZH_y(y, 0))$ se propage dans la direction positive de y le long de la ligne définie par $\Gamma_{+y} : y - ct = \text{Const.}$ Notons que l'Eqn. 2.13 résulte directement de la relation entre les champs et les impulsions de Riemann (Eqn. 2.11).

L'équation d'onde Eqn. 2.9 peut alors être résolue par propagation des invariants de Riemann pour des itérations temporelles infinitésimales. À la fin de chaque itération il faut déterminer à nouveau les champs à partir de la relation entre les invariants de Riemann et les valeurs des champs (Eqn. 2.11) et par cela la valeur des fonctions f_i . Le processus sur la grille peut être subdivisé en deux processus partiels, un *processus de propagation* et un *processus de répartition*:

Propagation Les invariants de Riemann aux valeurs propres $\{-c, c\}$ se propagent d'un nœud au nœud voisin.

Répartition Les invariants de Riemann qui vont quitter le nœud sont calculés à partir des invariants de Riemann incidents.

Le processus de répartition peut être formulé de la façon suivante: Nous calculons les nouveaux v_i^{n+1+} au temps $n+1+$ (après la repartition) à partir des anciens v_i^{n+1} au temps $n+1-$ (avant la repartition) aux composantes des champs u_i^{n+1} selon

$$v_i^{n+1-} \longrightarrow u_i^{n+1} \longrightarrow v_i^{n+1+}$$

Pour cela nous déterminons les u_i^{n+1} suivant l'Eqn. 2.11

$$v_i^{n+1-} = L u_i^{n+1}$$

En outre, nous déterminons les v_i^{n+1+} suivant la même équation

$$v_i^{n+1+} = L u_i^{n+1}$$

Puisque L possède un inverse unique, notamment R , le processus devient trivial. Nous obtenons alors

$$v_i^{n+1+} = L R v_i^{n+1-} = S v_i^{n+1-} \quad (2.14)$$

où $S = L R = I$ est la matrice de repartition. La vitesse des impulsions est égale au module des valeurs propres \sqrt{cm} et elle est identique à la vitesse c des ondes planes obéissant à l'Eqn. 2.9.

La relation entre les champs et les invariants de Riemann est donnée par l'inversion de l'Eqn. 2.11: $\mathbf{u} = R\mathbf{v}$, soit



Figure 2.1: *Propagation d'une onde plane en 1D.*

$$\begin{aligned} E_z &= v_1 + v_2 \\ H_x &= Zv_1 - Zv_2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Cette relation nous rappelle encore l'introduction des ondes réduites ("power waves"): Si on interprète les champs électriques comme des tensions et les champs magnétiques comme des courants, les invariants de Riemann correspondent aux ondes réduites introduites par Kurokawa 1965 [Kur65]. Cela implique l'unitarité de la matrice de répartition pour les invariants de Riemann. Nous y reviendrons dans la construction de la matrice S en 2D et 3D et dans la Section 2.3.

La figure 2.1 montre la propagation d'une onde plane avec l'impédance $Z = H_x/E_z$ sur une grille de dimension $D=1$: Le processus TLM consiste en une répartition des impulsions incidentes aux noeuds, suivie de la propagation de chaque noeud à son noeud voisin pour chaque pas d'itération dans le temps.

Pour que le processus sur grille simule bien l'équation 2.9, il faut que la distance entre deux noeuds voisins soit suffisamment petite devant la longueur d'onde. Cela est nécessaire pour que les fonctions f_i soient suffisamment bien approximées pendant l'itération. Le pas temporel Δt de l'itération est lié au pas spatial Δx par la relation $c = \Delta x/\Delta t$. Pour conserver la synchronisation du processus (le temps d'arrivée et le temps de départ des impulsions doit être le même dans toute la grille) il est aussi nécessaire que la distance soit la même entre tous les noeuds voisins.

Le processus TLM peut alors être généralisé pour le cas où l'espace des invariants de Riemann devient plus grand que l'espace des composantes de champs. Cela arrive pour des dimensions $D=2,3$, où le couplage des champs entre les différents axes dans l'espace introduit des dimensions supplémentaires.

2.2.2 Solution de l'équation d'onde par le processus TLM en 2D

Considérons maintenant le sous-espace (E_z, H_x, H_y) de l'équation 2.7, c'est à dire $E_x = E_y = H_z = 0$. L'équation 2.7 peut être résolue par les deux équations $\partial_x A_E \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} = 0$ et $\partial_y A_F \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} = 0$:

$$\partial_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ -2m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z/2 \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} + \partial_t \begin{bmatrix} E_z/2 \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

$$\partial_y \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z/2 \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} + \partial_t \begin{bmatrix} E_z/2 \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

Les solutions aux équations 2.16 et 2.17 sont des solutions de l'équation d'ondes en 2D

$$\partial_t^2 E_z - me(\partial_x^2 + \partial_y^2) E_z = 0 \quad (2.18)$$

Afin de résoudre l'équation 2.18 nous transformons les matrices A_E et A_F en un système aux axes principaux conforme aux valeurs propres communes $\lambda_i = \{-\sqrt{2em}, \sqrt{2em}\}$. Les impédances Z et les admittances Y des ondes planes sont définies comme dans le cas 1D. Les matrices de transformation sont données par $R_E L_E = L_E R_E = R_F L_F = L_F R_F = 1$ et $L_E A_E R_E = L_F A_F R_F = \text{diag}\{\lambda_i\}$. Les colonnes des matrices R sont toujours les vecteurs propres des valeurs propres λ_i . On trouve alors:

$$\begin{aligned} L_E &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{Z}{2} \\ 0 & 2c & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{Z}{2} \end{bmatrix} & R_E &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 2Y & 0 & -2Y \end{bmatrix} \\ L_F &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{Z}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 2c \\ \frac{Z}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} & R_F &= \begin{bmatrix} 2Y & 0 & 2Y \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nous construisons alors les invariants de Riemann aux valeurs propres $\{-\sqrt{2em}, \sqrt{2em}\}$ à partir des matrices L_E, L_F en supprimant les dimensions d'espace zéro. Les espaces zéro ont été introduits afin d'obtenir les 2 équations dans le même espace du vecteur des champs \mathbf{u} . La relation entre les champs et les invariants de Riemann peut être écrite $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ ou encore

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{Z}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{Z}{2} \\ \frac{Z}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{Z}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z/2 \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

La partie supérieure de la matrice A correspond à la matrice L_E , la partie inférieure correspond à la matrice L_F . La relation 2.20 peut être interprétée comme une généralisation du concept des ondes réduites en deux dimensions; Nous allons encore imposer l'unitarité de la matrice de répartition, comme dans le cas d'une jonction sans pertes décrite par la matrice des répartition pour des ondes réduites.

Nous résoudrons les équations 2.16 et 2.17 par un processus sur grille que nous subdivisons encore en un processus de propagation et un processus de répartition. Le processus de répartition est construit de la façon suivante: Nous déterminons les u_{ij}^{n+1} selon

$$\mathbf{v}_{ij}^{n+1-} = A \mathbf{u}_{ij}^{n+1} \quad (2.21)$$

D'autre part, nous déterminons les \mathbf{v}_{ij}^{n+1+} selon

$$\mathbf{v}_{ij}^{n+1+} = A \mathbf{u}_{ij}^{n+1} \quad (2.22)$$

L'Equation 2.21 ne peut pas être résolue par inversion de la matrice A , car le système est surdéterminé. Au lieu d'inverser l'équation nous formulons le processus de répartition en utilisant l'inverse général Moore-Penrose A^+ donné par $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ ¹

L'introduction de l'inverse général nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ij}^{n+1} &= A^+ \mathbf{v}_{ij}^{n+1-} = A^+ A A^+ \mathbf{v}_{ij}^{n+1-} = A^+ (A A^+ + B) \mathbf{v}_{ij}^{n+1-} \\ &= A^+ \mathbf{v}_{ij}^{n+1+} = A^+ A A^+ \mathbf{v}_{ij}^{n+1+} = A^+ (A A^+ + B) \mathbf{v}_{ij}^{n+1+} \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec $B \in \text{espace zéro}\{A^+\}$.

Nous obtenons un processus de répartition par la construction d'une matrice S pour laquelle on a

$$\mathbf{v}_{ij}^{n+1+} = S \mathbf{v}_{ij}^{n+1-} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{v}_{ij}^{n+1-} = S \mathbf{v}_{ij}^{n+1+} \quad (2.25)$$

Ici, l'équation 2.24 décrit des solutions se propageant vers les temps > 0 et 2.25 décrit des solutions se propageant vers les temps < 0 . On déduit alors des relations 2.23 que

¹L'inverse générale Moore-Penrose A^+ a les propriétés suivantes: $\bullet A A^+ A = A$, $\bullet A^+ A A^+ = A^+$, $\bullet (A A^+)^H = A A^+$ et $\bullet (A^+ A)^H = A^+ A$, où A^H désigne le conjugué transposé de la matrice A [Cam91].

$$S = AA^+ + B \quad (2.26)$$

En particulier, on a $A^+S = A^+$ et d'après les Eqs. 2.24, 2.25 $S = S^{-1}$ ou $S^2 = I$. La matrice B est déterminée uniquement par la condition de symétrie sur S ($S^TS^{-1} = I$): En plus du fait que $S^2 = I$ cela implique que S est unitaire ²:

$$S'^TS = I$$

Si on considère les invariants de Riemann comme des ondes réduites ("power waves" [Kur65], cf. Eqn. 2.15 en 1D) la demande que S soit symétrique correspond donc à la demande de conservation de l'énergie totale.

Nous allons construire la matrice de repartition S : Nous obtenons $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ sous la forme

$$A^+ = 2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2+Z^2} & \frac{\sqrt{2}}{2+Z^2} & \frac{Z}{2+Z^2} & \frac{Z}{2+Z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

On impose $Z = \sqrt{2}$. On détermine alors $B \in \text{espace zéro}\{A^+\}$:

$$B = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

De la condition que $S'^TS = I$ nous obtenons $\alpha = -1/4$. Nous obtenons donc $S = AA^+ + B$:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Nous allons pour la suite introduire un autre classement des invariants de Riemann: Dans la notation initiale, la propagation des impulsions de la méthode TLM ne se faisait pas par simple propagation d'un noeud au noeud voisin, mais par échange des impulsions entre les bras de deux noeuds voisins. La relation entre la notation initiale ("old") et la notation des invariants de Riemann est donnée dans le tableau 2.1.

²Au lieu de demander que S soit unitaire, il suffit donc de demander que S soit symétrique. Cela peut être justifié par la symétrie des équations de Maxwell vis à vis des composantes des champs. La conservation de l'énergie ($S^TS = I$) résulte alors de la symétrie des équations de Maxwell vis à vis des composantes des champs ($S'^TS^{-1} = I$) et de la symétrie des équations d'onde vis à vis d'une inversion de la direction du temps ($S^2 = I$).

	invariant	notation initiale	
		in	out
v_{E_1}	1	3	1
v_{E_3}	2	1	3
v_{F_1}	3	4	2
v_{F_3}	4	2	4

Tableau 2.1: Relation entre la notation initiale de la méthode TLM en 2D et la notation des invariants de Riemann.

Nous décrivons le rapport entre la notation initiale et la notation aux invariants de Riemann par des matrices de permutation telles que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+1-} &= A_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1-} \\ \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1+} &= A_{\text{out}} \mathbf{v}^{n+1+} \end{aligned} \quad (2.30)$$

où

$$A_{\text{in}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{\text{out}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Nous obtenons de l'Eqn. 2.24 le processus de répartition dans la notation initiale par:

$$\mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1+} = S_{\text{old}} \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1} \quad (2.32)$$

avec $S_{\text{old}} = A_{\text{out}} S A_{\text{in}}$.

On trouve alors

$$S_{\text{old}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Cette matrice est connue sous le nom de matrice de répartition pour le noeud condensé parallèle (condensed parallel node ou CPN). Elle correspond à la matrice de répartition pour deux tronçons de lignes de transmissions croisées, comme nous allons le voir plus tard dans la Section 2.3.3.

La vitesse de propagation des impulsions est égale au module des valeurs propres $|\lambda| = \sqrt{2em}$; par contre la vitesse des ondes dans l'équation 2.18 est $c = \sqrt{em}$. Les impulsions se propagent donc $\sqrt{2}$ fois plus vite que le front d'une onde plane.

La relation entre les champs et les invariants de Riemann est maintenant donnée dans la notation initiale (à une normalisation de la matrice A près) par

$$\mathbf{u}^{n+1} = A^+ A_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1} \quad (2.34)$$

et, particulièrement

$$E_z = \kappa \sum v_i^{n+1} \quad (2.35)$$

la constante κ étant déterminée par la normalisation de la matrice A . Dans la notation initiale on interprète les impulsions comme étant des tensions qui s'appliquent aux bras du noeud. La tension totale est égale au champ E_z , c'est à dire symboliquement

$$E_z = \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1} + \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1} = \mathbf{v}_{\text{total}} \quad (2.36)$$

Par exemple, pour une impulsion incidente sur le bras 1 on a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{total}} = (1+S)v_{\text{old}}^{n+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$\mathbf{v}_{\text{total}}$ est le même pour tous les bras du noeud, ce qui justifie l'écriture de l'Eqn. 2.36. Suivant l'Eqn. 2.36, la superposition des impulsions incidentes est égale au champ E_z , alors $E_z = \kappa/2 \times 4 = 2\kappa = 1/2$. Celui-ci donne une constante de normalisation $\kappa = 1/4$. Nous avons donc montré qu'à une normalisation près, on peut calculer le champs E_z soit par la relation 2.36 (selon la notation initiale), soit par la relation matricielle 2.34 (selon la méthode de décomposition des équations de Maxwell sous forme matricielle vue plus haut).

2.2.3 Solution de l'équation d'ondes par le processus TLM en 3D

Considérons l'Eqn. 2.7 dans l'ensemble de l'espace $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$: L'équation 2.7 peut être résolue par

$$\begin{aligned} A_E \partial_x \mathbf{u}_x + \partial_t \mathbf{u}_x &= 0 \\ A_F \partial_x \mathbf{u}_y + \partial_t \mathbf{u}_y &= 0 \\ A_G \partial_x \mathbf{u}_z + \partial_t \mathbf{u}_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

où

$$A_E = 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_F &= 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A_G &= 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

et avec les vecteurs des champs dans les sous-espaces définis par $\mathbf{u}_x = (0, E_y, E_z, 0, H_y, H_z)$, $\mathbf{u}_y = (E_x, 0, E_z, H_x, 0, H_z)$ et $\mathbf{u}_z = (E_x, E_y, 0, H_x, H_y, 0)$.

L'équation 2.38 simule les équations 2.5 et 2.6 séparément par simulation des solutions des équations pour des ondes de polarisation TE et TM.

Nous obtenons à partir des équations 2.38 un système d'équations du même vecteur de champ \mathbf{u} en remplaçant simplement les vecteurs \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z par le vecteur $\mathbf{u} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$. Cela nécessite pour établir la relation entre les champs et les invariants de Riemann, de supprimer les sous-espaces de valeur propre zéro. L'ensemble des valeurs propres des équations matricielles est $\{-2\sqrt{em}, -2\sqrt{em}, 0, 0, 2\sqrt{em}, 2\sqrt{em}\}$. Les matrices de transformation en système d'axes principaux sont déterminées par $L_E A_E R_E = L_F A_F R_F = L_G A_G R_G = \text{diag}\{\lambda\}$ et par $L_{E,F,G} R_{E,F,G} = R_{E,F,G} L_{E,F,G} = 1$. En calculant les vecteurs propres des matrices A_E , A_F et A_G nous obtenons les colonnes des matrices R . Les matrices L sont obtenues ensuite par inversion. On obtient:

$$\begin{aligned}
R_E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & -Y \\ -Y & 0 & 0 & 0 & Y & 0 \end{bmatrix} \\
L_E &= \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -Z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Z & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -Z & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_F &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 & -Y & 0 \end{bmatrix} \\
L_F &= \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 1 & -Z & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z \\ 0 & 0 & 1 & Z & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
R_G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & -Y & 0 \\ -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
L_G &= \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 \end{bmatrix} \tag{2.39}
\end{aligned}$$

où les admittances Y et les impédances Z sont définies comme dans le cas 1D.

Nous construisons encore les invariants de Riemann aux valeurs propres $\{-2\sqrt{em}, 2\sqrt{em}\}$ à partir des matrices L_E , L_F et L_G en supprimant les espaces de valeurs propres zéro: Nous obtenons ainsi comme relation entre les invariants de Riemann \mathbf{v} et le vecteur des champs \mathbf{u} :

$$\mathbf{v} = A\mathbf{u} \tag{2.40}$$

où

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -Z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -Z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 1 & -Z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z \\ 0 & 0 & 1 & Z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 \end{bmatrix}$$

Nous résoudrons l'Eqn. 2.38 au même vecteur de champs \mathbf{u} par un processus sur grille où chaque itération est subdivisée en un processus de répartition et un processus de propagation. La matrice de répartition S est encore donnée par

$$S = A^+ A + B \quad (2.41)$$

la matrice $A^+ = (A^T A)^{-1}$ étant l'inverse généralisé de la matrice A et $B \in \text{espace zéro}\{A^+\}$ tel que $S^T S = 1$ (c'est à dire S unitaire). On trouve alors la matrice A^+ :

$$A^+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y & 0 & Y & 0 & Y & -Y & 0 \\ 0 & Y & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y & 0 & 0 & Y \\ -Y & 0 & Y & 0 & Y & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

et la matrice B est donnée par:

$$B = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

	invariant	notation initiale	
		in	out
v_{F_1}	1	3	11
v_{F_2}	2	6	10
v_{F_3}	3	11	3
v_{F_4}	4	10	6
v_{F_1}	5	1	12
v_{F_2}	6	5	7
v_{F_3}	7	12	1
v_{F_4}	8	7	5
v_{G_1}	9	2	9
v_{G_2}	10	4	8
v_{G_3}	11	8	4
v_{G_4}	12	9	2

Tableau 2.2: Relation entre la notation initiale de la méthode TLM en 3D et la notation des invariants de Riemann.

avec $\alpha = -1/4$ (S unitaire). On trouve:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La relation entre les champs et les invariants de Riemann est donnée par

$$\mathbf{u}^{n+1} = A^+ \mathbf{v}^{n+1} \quad (2.45)$$

Nous écrivons cette relation sous forme de matrices de permutation, définies par $\mathbf{v}^{n+1} = A_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1}$ et $\mathbf{v}^{n+1} = A_{\text{out}} \mathbf{v}^{n+1}$ comme dans le cas 2D (cf. Lo Vetri et al. [LoV93]). On trouve alors $S_{\text{old}} = A_{\text{out}} S A_{\text{in}}$ où:

$$S_{\text{old}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

La relation entre les champs et les impulsions dans la notation initiale est donnée par

$$\mathbf{u}^{n+1} = A^+ A_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{old}}^{n+1} \quad (2.47)$$

La vitesse des impulsions dans la grille est égale au module des valeurs propres $2\sqrt{em}$. Par contre, la vitesse de propagation pour les équations d'ondes 2.5 et 2.6 est $c = \sqrt{em}$. Les impulsions se propagent dans la grille deux fois plus vite que les fronts d'ondes planes.

2.3 La méthode TLM dans des milieux inhomogènes à pertes

Nous avons démontré que la propagation des ondes en 1D, 2D et 3D peut être simulée par un processus sur grille consistant en une répartition suivie d'une propagation des impulsions. Les impulsions peuvent être interprétées comme des ondes réduites ("power waves"). Cela permet d'introduire facilement des métallisations ("murs électriques") et des plans de symétrie ("murs magnétiques").

Dans la suite, nous présentons l'introduction de ces murs électriques et des murs magnétiques par réflexion des impulsions à mi-chemin entre deux noeuds ainsi que l'introduction des milieux diélectriques par simulation de ϵ_r et μ_r en ajoutant des dimensions à la matrice de répartition.

Finalement, le fait de pouvoir changer la vitesse de propagation par l'intermédiaire de ϵ_r et μ_r dans la grille permet de synchroniser les impulsions dans un maillage de forme parallélépipédique et variable. Pour une distribution de champs donnée, cela permettra de simuler avec une haute résolution spatiale (qui demande beaucoup d'espace mémoire) seulement les régions du domaine de calcul où la variation des champs est grande. On gagne donc de l'espace mémoire par rapport à un maillage cubique qui traite le même problème.

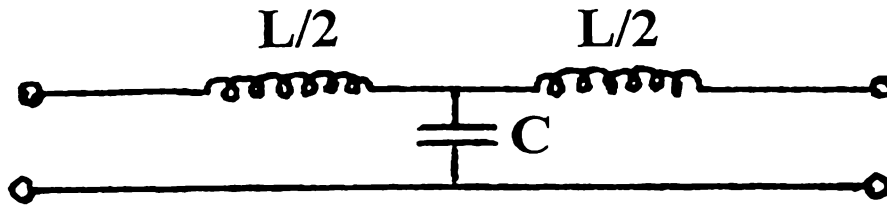


Figure 2.2: Schéma équivalent pour la simulation de l'équation de lignes.

2.3.1 Simulation de murs électriques et de murs magnétiques

Dans le cas 1D nous avons montré que la relation entre les champs et les invariants de Riemann correspond à la relation entre les tensions et courants et les ondes réduites. Nous pouvons regarder la solution de l'équation 2.9 comme étant la solution de l'équation des lignes, le champ E_z étant équivalent à la tension et le champ H_x équivalent au courant. Nous en déduisons une façon simple de construire les murs électriques et les murs magnétiques:

mur électrique Des murs avec une conductivité infiniment grande possèdent une impédance nulle. Les impulsions seront donc réfléchies pendant la propagation avec un coefficient de réflexion -1 . Afin de conserver la synchronisation des impulsions dans la grille, les murs électriques sont placés à mi-chemin entre deux noeuds.

mur magnétique Des murs de symétrie sont obtenus par une réflexion des impulsions avec un facteur de réflexion $+1$. Afin de conserver la synchronisation des impulsions dans la grille, les murs magnétiques sont placés à mi-chemin entre deux noeuds.

2.3.2 Lignes de transmission en 1D: Introduction des "stubs"

Les "stubs" correspondant à des dimensions spatiales supplémentaires pour permettre un ϵ_r et un μ_r dépendant de la direction. Pour cela, nous établissons encore l'équivalence entre l'équation 2.9 et l'équation de lignes, c'est à dire $E_z = V$, $H_x = I$, $C = c$. Le schéma équivalent est montré dans la figure 2.2

Le système d'équations tel qu'il est simulé avec ce schéma équivalent est alors

$$\begin{aligned}\partial_x V &= -L \partial_t I \\ \partial_x I &= -C \partial_t V\end{aligned}\tag{2.48}$$

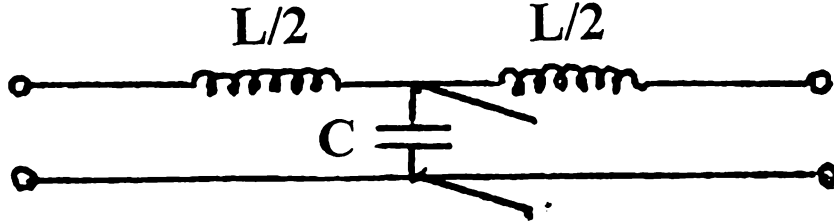


Figure 2.3: Schéma équivalent pour la simulation de l'équation de lignes avec stub parallèle.

En dérivant selon x et en substituant chaque fois l'autre équation on obtient l'équation d'ondes en 1D (cf. Eqn. 2.9):

$$\partial_t^2 \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = LC \partial_y^2 \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

De la relation entre les tensions, courants et les invariants de Riemann (cf. Eqn. 2.11)

$$\begin{aligned} v_1 &= V + ZI \\ v_2 &= V - ZI \end{aligned} \quad (2.50)$$

on conclut que les invariants de Riemann sont identiques aux ondes réduites.

De la théorie des lignes on sait comment on peut ajouter des stubs capacitifs, c'est à dire augmenter $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, et des stubs inductifs, c'est à dire augmenter $\mu = \mu_r \mu_0$. De même on peut introduire des stubs infiniment longs afin de simuler des pertes décrites par une conductivité σ dans les équations de Maxwell.

Nous montrons dans la suite comment l'introduction de capacités et inductances change la matrice de répartition pour le noeud correspondant au schéma équivalent de l'ensemble (ligne+stub).

Le stub parallèle Nous ajoutons d'abord un stub en parallèle sur le tronçon de ligne montré dans la figure 2.2. Le stub augmente la capacité de la ligne de la façon suivante:

Le stub ramène sur la ligne une admittance

$$Y_{\text{ramené}} = jY_0\omega\sqrt{LC}\frac{\Delta\ell}{2} \quad (2.51)$$

Avec $Y_0 = 1/Z_0 = \sqrt{C/L}$ on trouve alors l'admittance normalisée :

$$Y_{\text{ramené}}/Y_0 = j\omega C'_{\text{st}}/Y_0 = j\omega C\frac{\Delta\ell}{2} \quad (2.52)$$

$$C'_{\text{st}} = Y_0 C\frac{\Delta\ell}{2} \quad (2.53)$$

L'index "st" désigne le stub.

D'autre part, la capacité de la ligne correspond par équivalence à

$$\epsilon_0 = C\Delta\ell \quad (2.54)$$

La capacité totale du schéma équivalent est alors

$$\epsilon_r\epsilon_0 = C\Delta\ell + CY_0\frac{\Delta\ell}{2} = C\Delta\ell(1 + \frac{Y_0}{2}) \quad (2.55)$$

Le stub parallèle d'admittance Y_{st} simule donc en 1D une permittivité

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Y_{\text{st}}}{2} \quad (2.56)$$

En 2D, le facteur 1/2 dans l'Eqn. 2.56 doit être remplacé par un facteur 1/4.

La longueur du stub est égale à $\Delta\ell/2$ afin de conserver la synchronisation des impulsions dans la grille. Les impulsions sont réfléchies à l'extrémité du stub avec un facteur +1 (stub en circuit ouvert).

La matrice de répartition

En regardant la figure 2.3, on trouve que les impédances vues du port 1 ou du port 2 sont $Z_T = 1/(1 + Y_{\text{st}})$, $Z_0 = 1$. On obtient alors pour la réflexion Γ et pour la transmission $T = 1 + \Gamma$ (le signe "+" apparaît puisqu'il s'agit d'un stub parallèle à la ligne)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = -\frac{Y_{\text{st}}}{2 + Y_{\text{st}}} \\ T &= 1 + \Gamma = \frac{2}{2 + Y_{\text{st}}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Les impédances vues du stub sont $Z_T = 1/2$, $Z_0 = 1/Y_{\text{st}}$. On obtient pour la réflexion Γ et pour la transmission $T = 1 + \Gamma$

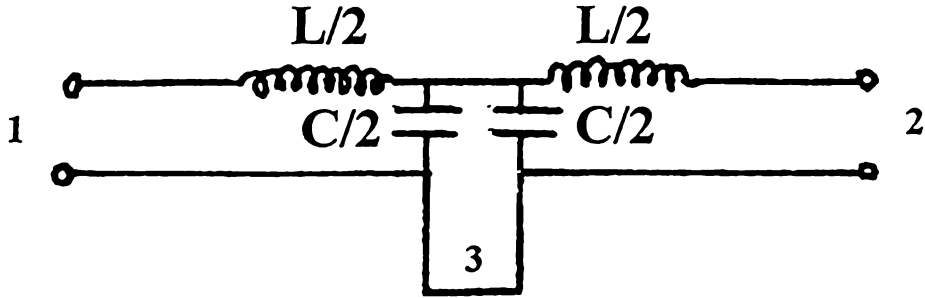


Figure 2.4: Schéma équivalent pour la simulation de l'équation de lignes avec stub série.

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = \frac{Y_{st} - 2}{Y_{st} + 2} \\ T &= 1 + \Gamma = \frac{2Y_{st}}{2 + Y_{st}}\end{aligned}\quad (2.58)$$

Nous obtenons alors la matrice de repartition:

$$S = \frac{1}{2 + Y_{st}} \begin{bmatrix} -Y_{st} & 2 & 2Y_{st} \\ 2 & -Y_{st} & 2Y_{st} \\ 2 & 2 & -(2 - Y_{st}) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Le stub série Nous ajoutons d'abord un stub série au tronçon de ligne montré dans la figure 2.2. Le stub augmente l'inductance de la ligne de la façon suivante:

Le stub ramène sur la ligne une impédance

$$Z_{\text{ramené}} = jZ_0\omega L \frac{\Delta\ell}{2} \quad (2.60)$$

Soit une impédance normalisée:

$$Z_{\text{ramené}}/Z_0 = j\omega L_{st}/Z_0 = j\omega L \frac{\Delta\ell}{2} \quad (2.61)$$

$$L_{st} = Z_0 L \frac{\Delta\ell}{2} \quad (2.62)$$

D'autre part, l'inductance de la ligne correspond par équivalence à

$$\mu_0 = L\Delta\ell \quad (2.63)$$

L'inductance totale du schéma équivalent est alors

$$\mu_r\mu_0 = L\Delta\ell + LZ_0\frac{\Delta\ell}{2} = L\Delta\ell(1 + \frac{Z_0}{2}) \quad (2.64)$$

Le stub série d'impédance Z_{st} simule donc en 1D une perméabilité

$$\mu_r = 1 + \frac{Z_{st}}{2} \quad (2.65)$$

En 2D, le facteur $1/2$ dans l'Eqn. 2.65 doit être remplacé par un facteur $1/4$.

La longueur du stub est égale à $\Delta\ell/2$ afin de conserver la synchronisation des impulsions dans la grille. Les impulsions sont réfléchies à l'extrémité du stub avec un coefficient -1 (stub court-circuité).

La matrice de répartition

En regardant la figure 2.4 on voit que les impédances vues du port 1 ou du port 2 sont $Z_T = 1 + Z_{st}$, $Z_0 = 1$. On obtient pour la réflexion Γ et pour la transmission $T = 1 - \Gamma$ (courant commun)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = \frac{Z_{st}}{2 + Z_{st}} \\ T &= 1 - \Gamma = \frac{2}{2 + Z_{st}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Les impédances vues du stub sont $Z_T = 2$, $Z_0 = Z_{st}$. On obtient pour la réflexion Γ et pour la transmission $T = 1 - \Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = -\frac{Z_{st} - 2}{Z_{st} + 2} \\ T &= 1 - \Gamma = \frac{2Z_{st}}{2 + Z_{st}} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Nous obtenons alors la matrice de répartition en tenant compte du changement de signes entre le bras 1 d'une part et les bras 2 et 3 d'autre part comme

$$S = \frac{1}{2 + Z_{st}} \begin{bmatrix} Z_{st} & 2 & -2 \\ 2 & Z_{st} & 2 \\ -2Z_{st} & 2Z_{st} & 2 - Z_{st} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.3.3 Les noeuds 2D: Le noeud parallèle et le noeud série

Nous décrivons dans la suite la méthode TLM classique en 2D. En 2D, il existe 2 possibilités de former un noeud à partir de lignes de transmission: L'une mène au noeud parallèle, l'autre mène au noeud série. Comme les noms l'indiquent, le noeud parallèle peut être complété en ajoutant un stub parallèle et le noeud série peut être complété en ajoutant un stub série. Les stubs permettent comme dans le cas 1D de simuler des permittivités (stub parallèle) et des perméabilités (stub série). Le noeud parallèle peut en plus être complété par un stub de conductivité infiniment long afin de simuler des pertes par conduction.

Les deux noeuds ont été utilisés afin de construire un noeud constitué de 3 noeuds parallèles et 3 noeuds séries pour simuler les équations de Maxwell en espace 3D ("expanded node" cf. Hoefer [Hoe85]).

Le noeud parallèle

En 2D on s'intéresse à la simulation d'équations de Maxwell soit dans le sous-espace $E_x = E_y = H_z = 0$ (mode transversal magnétique ou TM) ou bien dans le sous-espace $H_x = H_y = E_z = 0$ (mode transversal électrique ou TE). Les équations de Maxwell donnent alors

$$\text{TM:} \quad \partial_y E_z = -\mu \partial_t H_x; \quad \partial_x E_z = \mu \partial_t H_y; \quad \partial_x H_y - \partial_y H_x = \epsilon \partial_x E_z \quad (2.69)$$

$$\text{TE:} \quad \partial_y H_z = \epsilon \partial_t E_x; \quad \partial_x H_z = -\epsilon \partial_t E_y; \quad \partial_x E_y - \partial_y E_x = -\mu \partial_x H_z \quad (2.70)$$

ce qui simule l'équation d'ondes en 2D (cf. Eqn. 2.18)

$$\text{TM:} \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2) E_z - \epsilon \mu \partial_t^2 E_z = 0 \quad (2.71)$$

$$\text{TE:} \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2) H_z - \epsilon \mu \partial_t^2 H_z = 0 \quad (2.72)$$

Les équations pour le mode TM ou le mode TE (Eqs. 2.69, 2.70) peuvent être simulées par le schéma équivalent du noeud parallèle montré sur la figure 2.5.

En comparant ce schéma avec les relations 2.69, 2.70 on établit les équivalences suivantes entre les tensions et courants du noeud et les composantes des champs des modes TM et TE pour le noeud parallèle:

$$\text{TM:} \quad V_x = E_x; \quad I_x = -H_y; \quad I_y = H_x; \quad 2C = \epsilon; \quad L = \mu \quad (2.73)$$

$$\text{TE:} \quad V_x = H_z; \quad I_x = E_y; \quad I_y = -E_x; \quad 2C = \mu; \quad L = \epsilon \quad (2.74)$$

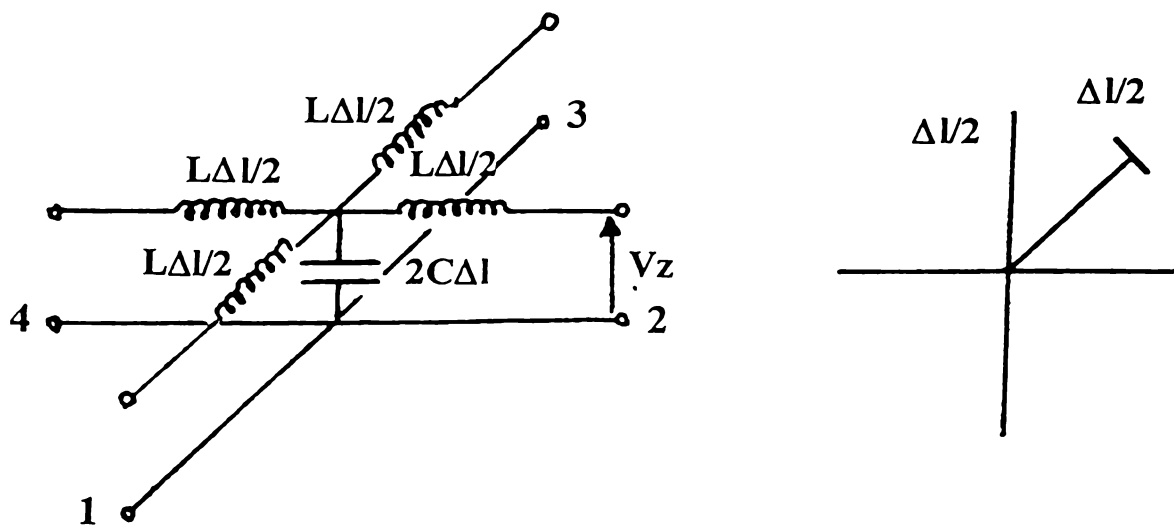


Figure 2.5: Schéma équivalent du noeud parallèle et noeud parallèle avec stub ouvert.

Les tensions sont les tensions totales (somme des impulsions entrantes et sortantes par les bras 1 à 4).

Nous ajoutons à ce noeud un stub en parallèle d'admittance $Y_{st} = 4(\epsilon_r - 1)$ (cf. la figure 2.5). La longueur du stub est égale à $\Delta\ell/2$ afin de conserver la synchronisation des impulsions dans la grille.

La matrice de répartition peut maintenant être obtenue facilement — comme en 1D — en utilisant la théorie des lignes de transmission: Une impulsion arrivant au noeud par une des 4 lignes principales ($Y_0 \equiv 1$) voit une admittance $Y_T = 3 + Y_{st}$. Le coefficient de réflexion Γ sera alors:

$$\Gamma = \frac{1 - (3 + Y_{st})}{1 + (3 + Y_{st})} = -\frac{2 + Y_{st}}{4 + Y_{st}}$$

Le coefficient de transmission sera $1 + \Gamma = 2/(4 + Y_{st})$.

Une impulsion venant du stub ($Y_0 = Y_{st}$) voit une admittance $Y_T = 4$. Le coefficient de réflexion va donc être

$$\Gamma = \frac{Y_{st} - 4}{Y_{st} + 4}$$

Le coefficient de transmission sera $1 + \Gamma = 2Y_{st}/(4 + Y_{st})$.

La matrice de répartition S devient alors

$$S = \frac{1}{4 + Y_{st}} \times \begin{bmatrix} -(2 + Y_{st}) & 2 & 2 & 2 & 2Y_{st} \\ 2 & -(2 + Y_{st}) & 2 & 2 & 2Y_{st} \\ 2 & 2 & -(2 + Y_{st}) & 2 & 2Y_{st} \\ 2 & 2 & 2 & -(2 + Y_{st}) & 2Y_{st} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Y_{st} - 4 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Des matériaux à pertes peuvent être simulés avec le noeud parallèle en introduisant un stub en parallèle de longueur infinie et de conductance G_{st} telle que

$$G_{st} = \sigma Z_0 \Delta\ell \quad (2.76)$$

où $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ et σ est la conductivité à simuler.

Les impulsions entrant dans le stub de pertes ne seront pas réfléchies. Nous trouvons la matrice de répartition pour le noeud parallèle avec simulation d'un milieu avec permittivité et pertes:

$$S = \frac{1}{4 + Y_1} \times \begin{bmatrix} -(2 + Y_1) & 2 & 2 & 2 & 2Y_{st} \\ 2 & -(2 + Y_1) & 2 & 2 & 2Y_{st} \\ 2 & 2 & -(2 + Y_1) & 2 & 2Y_{st} \\ 2 & 2 & 2 & -(2 + Y_1) & 2Y_{st} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & Y_{st} - 4 - G_{st} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

où $Y_1 = Y_{st} + G_{st}$

Commentaires:

1. Dans le cas des milieux inhomogènes à pertes des problèmes surviennent aux interfaces entre deux milieux, puisque le coefficient de réflexion devient complexe et déforme les impulsions. Cela n'est pas prise en compte par la méthode TLM. On demande alors que les pertes soient suffisamment faibles pour que la partie imaginaire du coefficient de réflexion puisse être négligée.
2. La matrice de répartition se réduit dans le cas $\epsilon_r = 1$ (AIR) et sans pertes à la matrice de répartition de l'Eqn. 2.29. La vitesse de propagation des impulsions est $c_0/\sqrt{2}$. Par contre la vitesse de propagation des fronts d'ondes dans un milieu diélectrique est $c_0/\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$.
3. Il est possible de simuler des milieux avec une perméabilité μ_r avec le noeud parallèle en tenant compte du saut d'impédance introduit aux interfaces où la perméabilité μ_r change (voir Saguet [Sag85]).
4. La relation entre les champs et les tensions et courants est donné par Hoefer [Ito89] comme suit:

$$\begin{aligned} E_z &= V_z = \frac{2}{4 + Y_{st} + G_{st}} \left[\sum_{m=1}^4 V_m^{inc} + V_5^{inc} Y_{st} \right] \\ -H_y &= I_x = [V_2^{inc} - V_4^{inc}] / Z_0 \\ H_x &= I_y = [V_1^{inc} - V_3^{inc}] / Z_0 \end{aligned}$$

où $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ est l'impédance caractéristique de la grille et l'indice "inc" désigne les impulsions incidentes (c'est à dire au temps $n + 1^-$).

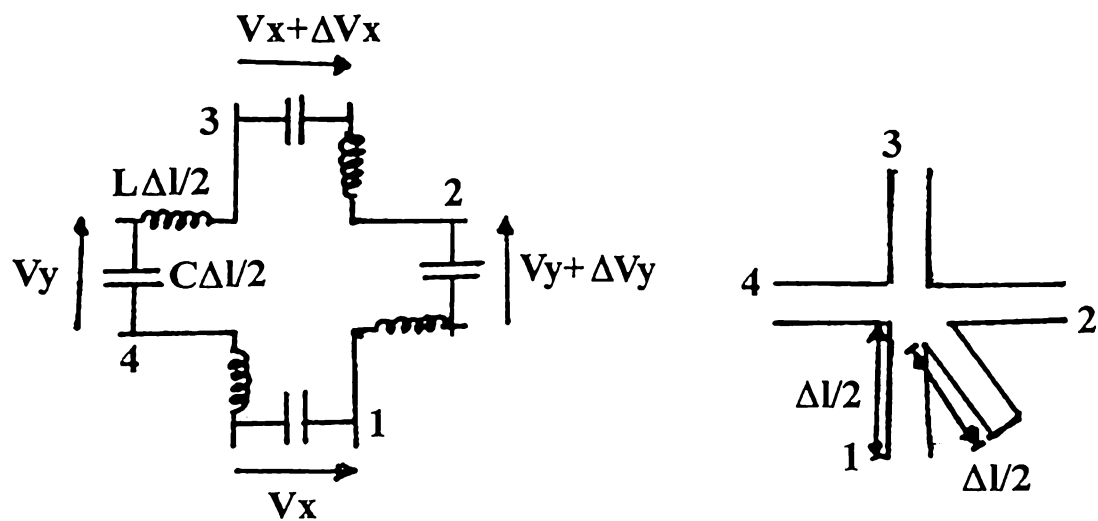


Figure 2.6: Schéma équivalent du noeud série et noeud série avec stub court-circuité.

Le noeud série

Les équations pour le mode TM ou le mode TE (Eqs. 2.69, 2.70) peuvent également être simulées par le schéma équivalent du noeud série montré sur la figure 2.6.

En comparant ce schéma avec les relations 2.69, 2.70 on établit les équivalences suivantes entre les tensions et courants du noeud et les composantes des champs des modes TM et TE pour le noeud série:

$$\text{TM:} \quad I = E_z; \quad V_y = -H_y; \quad V_x = H_x; \quad 2L = \epsilon; \quad C = \mu \quad (2.78)$$

$$\text{TE:} \quad I = H_z; \quad V_y = E_y; \quad V_x = -E_x; \quad 2L = \mu; \quad C = \epsilon \quad (2.79)$$

Nous ajoutons à ce noeud un stub série d'une impédance $Z_{\text{st}} = 4(\mu_r - 1)$ (cf. la figure 2.6). La longueur du stub est égale à $\Delta\ell/2$ afin de conserver la synchronisation des impulsions dans la grille.

La matrice de répartition peut maintenant être obtenue facilement en utilisant la théorie des lignes de transmission: Une impulsion arrivant au noeud par une des 4 lignes principales ($Z_0 \equiv 1$) voit une impédance $Z_T = 3 + Z_{\text{st}}$. Le coefficient de réflexion Γ sera alors

$$\Gamma = \frac{2 + Z_{\text{st}}}{4 + Z_{\text{st}}}$$

Cette impulsion sera transmise sur les autres bras avec un valeur $1 - \Gamma = 2/(4 + Z_{\text{st}})$.

Une impulsion venant du stub ($Z_0 = Z_{\text{st}}$) voit une admittance $Z_T = 4$. Le coefficient de réflexion va donc être

$$\Gamma = \frac{4 - Z_{\text{st}}}{Z_{\text{st}} + 4}$$

Elle sera alors transmise sur les autres bras avec un valeur $1 - \Gamma = 2Z_{\text{st}}/(4 + Z_{\text{st}})$.

La matrice de répartition S devient alors en tenant compte d'un changement de signes entre les tensions sur les bras 2 et 3 d'une part et les tensions sur les bras 1, 4 et 5 d'autre part

$$S = \frac{1}{4 + Z_{\text{st}}} \times \begin{bmatrix} 2 + Z_{\text{st}} & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 + Z_{\text{st}} & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 + Z_{\text{st}} & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 + Z_{\text{st}} & 2 \\ -2Z_{\text{st}} & 2Z_{\text{st}} & 2Z_{\text{st}} & -2Z_{\text{st}} & 4 - Z_{\text{st}} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Commentaires:

1. La vitesse de propagation des impulsions est $c_0/\sqrt{2}$. Par contre, la vitesse de propagation des fronts d'ondes dans un milieu diélectrique est $c_0/\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$.
2. Il est possible de simuler des milieux avec une permittivité ϵ_r avec le noeud série en tenant compte du saut d'impédance introduit aux interfaces où la permittivité ϵ_r change (voir Saguet [Sag85]).
3. La relation entre les champs et les tensions et courants est donnée par Hofer [Ito89] comme suit:

$$\begin{aligned} H_z &= I_z = \frac{2}{4 + Z_{st}} \left[\sum_{n=1}^4 V_n^{inc} + V_5^{inc} Z_{st} \right] / Z_0 \\ E_y &= V_y = V_2^{inc} - V_4^{inc} \\ -E_x &= V_x = V_1^{inc} - V_3^{inc} \end{aligned}$$

où Z_0 est toujours l'impédance caractéristique des lignes et l'indice "inc" désigne les impulsions incidentes.

2.3.4 Les noeuds en 3D: Le noeud distribué, le noeud condensé asymétrique et le noeud condensé symétrique

Le noeud distribué

L'ensemble des équations 2.7 peut être simulé en utilisant 6 noeuds 2D, dont 3 noeuds parallèles et 3 noeuds séries. Considérons par exemple la connexion d'un noeud parallèle à deux noeuds séries montrée dans la figure 2.7

Sur le noeud parallèle, la tension est commune aux deux lignes et l'équation

$$\partial_z H_x - \partial_x H_z = c\partial_t E_y \quad (2.81)$$

est simulée.

Sur les noeuds séries, le courant est commun et on a dans les plans y-z et x-y

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -\mu\partial_t H_x \quad (2.82)$$

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = -\mu\partial_t H_z \quad (2.83)$$

Les trois équations 2.81 à 2.83 donnent la moitié des équations de l'Eqn. 2.7. On obtient l'autre moitié en connectant un noeud série du plan x-z à deux noeuds parallèles comme cela est montré dans la figure 2.8.

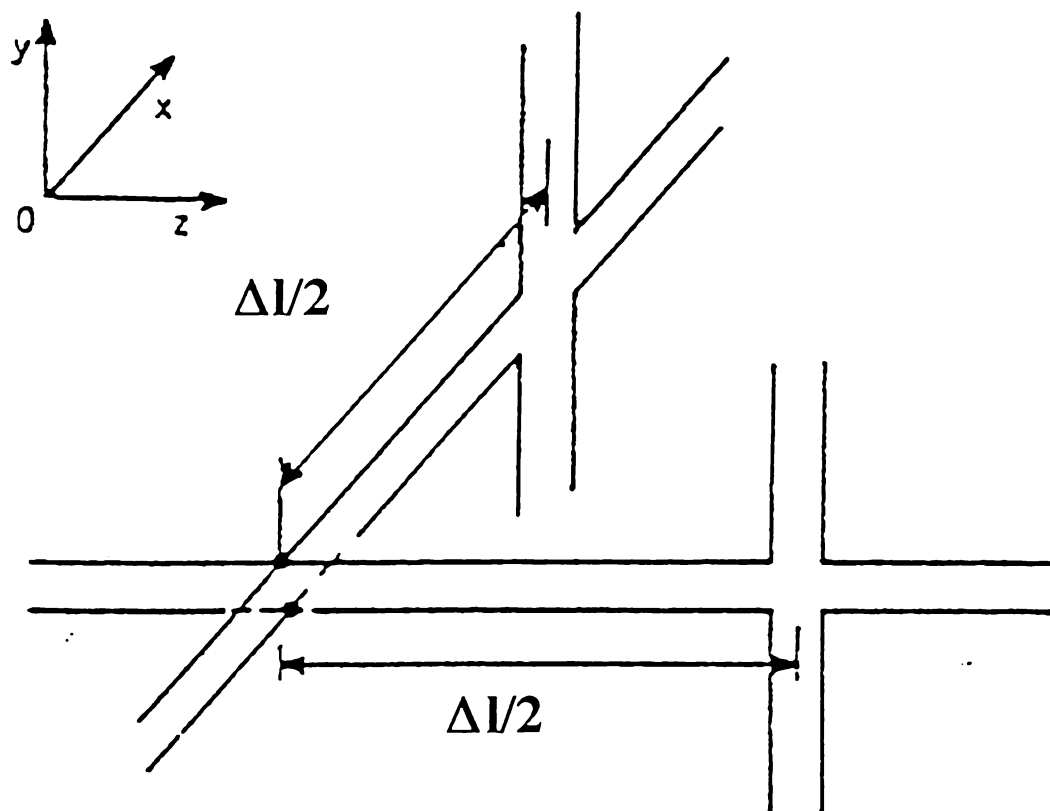


Figure 2.7: Deux noeuds séries connectés à un noeud parallèle.

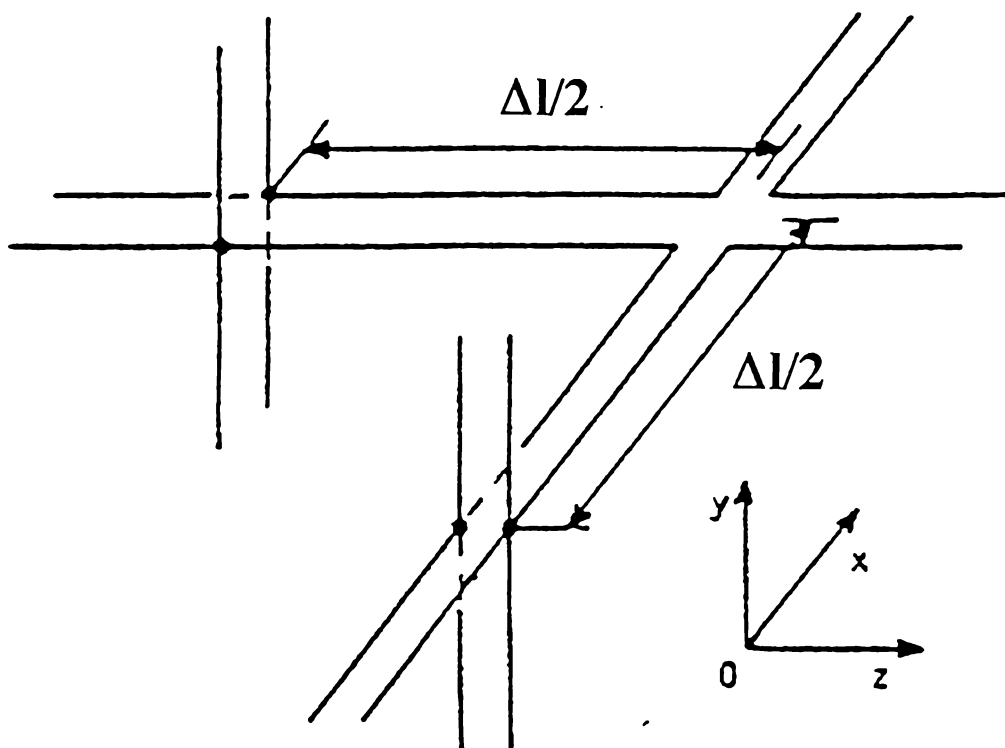


Figure 2.8: Deux noeuds parallèles connectés à un noeud série.

Les équations simulées sont alors

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z = -\mu \partial_t H_y \quad (2.84)$$

$$\partial_y H_z - \partial_z H_y = \epsilon \partial_t E_x \quad (2.85)$$

$$\partial_x H_y - \partial_y H_x = \epsilon \partial_t E_z \quad (2.86)$$

On obtient la totalité des deux systèmes Eqs. 2.81 à 2.86 en connectant les noeuds. La totalité des 6 noeuds forme le noeud de base représenté sur la figure 2.9. La distance entre les noeuds est $\Delta\ell/2$.

On obtient le noeud pour un milieu inhomogène à pertes comme en 2D, en ajoutant des stubs: Aux noeuds parallèles on ajoute des stubs ouverts avec l'admittance caractéristique normalisée

$$Y_0 = 4(\epsilon_r - 1)$$

et des stubs semi-infinis avec l'admittance caractéristique normalisée

$$G_0 = \sigma Z_{\text{AIR}} \Delta\ell$$

Aux noeuds séries on ajoute des stubs court-circuités avec l'impédance caractéristique normalisée

$$Z_0 = 4(\mu_r - 1)$$

Notons que ce noeud n'est pas symétrique.

Le noeud condensé asymétrique

En 1982, P. Saguet et E. Pic ont proposé un noeud condensé asymétrique [Sag82]. Il est obtenu à partir du noeud distribué en supprimant les tronçons de lignes d'interconnexion. Il est montré dans la figure 2.10.

Le noeud ponctuel asymétrique possède 18 bras: 12 bras d'interconnexion et 6 bras pour les stubs. Les stubs de conductance n'interviennent ici que dans le calcul des coefficients de la matrice car ils sont semi-infinis. Il existe un schéma équivalent pour ce noeud montré dans la figure 2.11.

La matrice de répartition est une matrice de 18×18 . Elle peut être dérivée du schéma équivalent. La matrice et le calcul ne seront pas présentés ici. La matrice et le calcul détaillé se trouvent dans [Sag85]. Les éléments de la matrice ne dépendent que du maillage et ne sont calculés qu'une fois au début du processus itératif. La matrice de répartition permet alors à chaque itération de calculer les impulsions sortant du noeud ponctuel en fonction des impulsions incidentes sur tout les bras. Comme le noeud distribué, le noeud ponctuel asymétrique reste asymétrique.

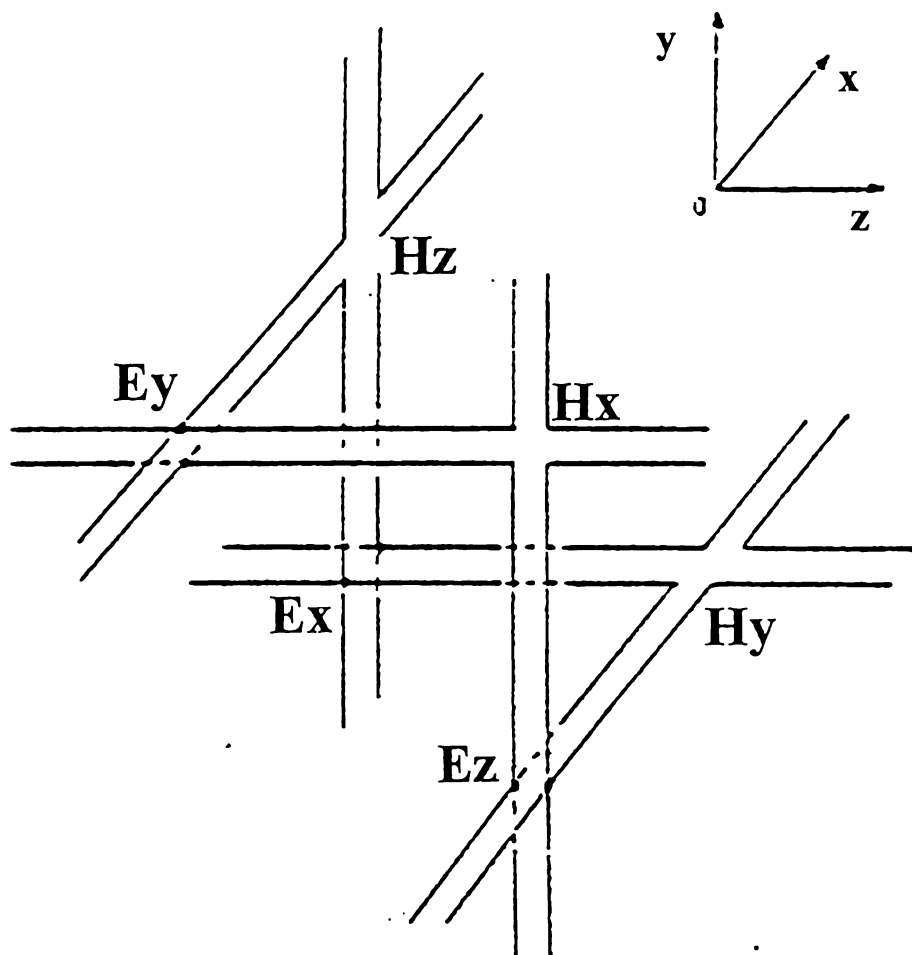


Figure 2.9: Noeud distribué en trois dimensions.

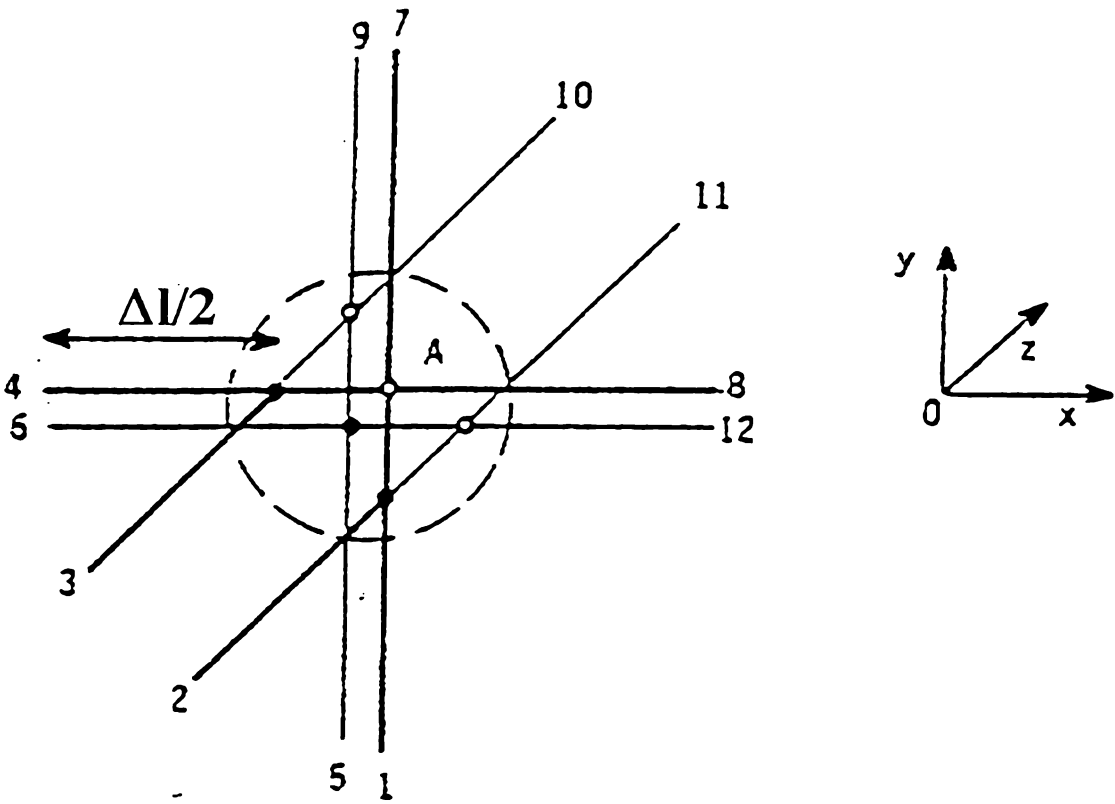


Figure 2.10: *Noeud ponctuel asymétrique.*

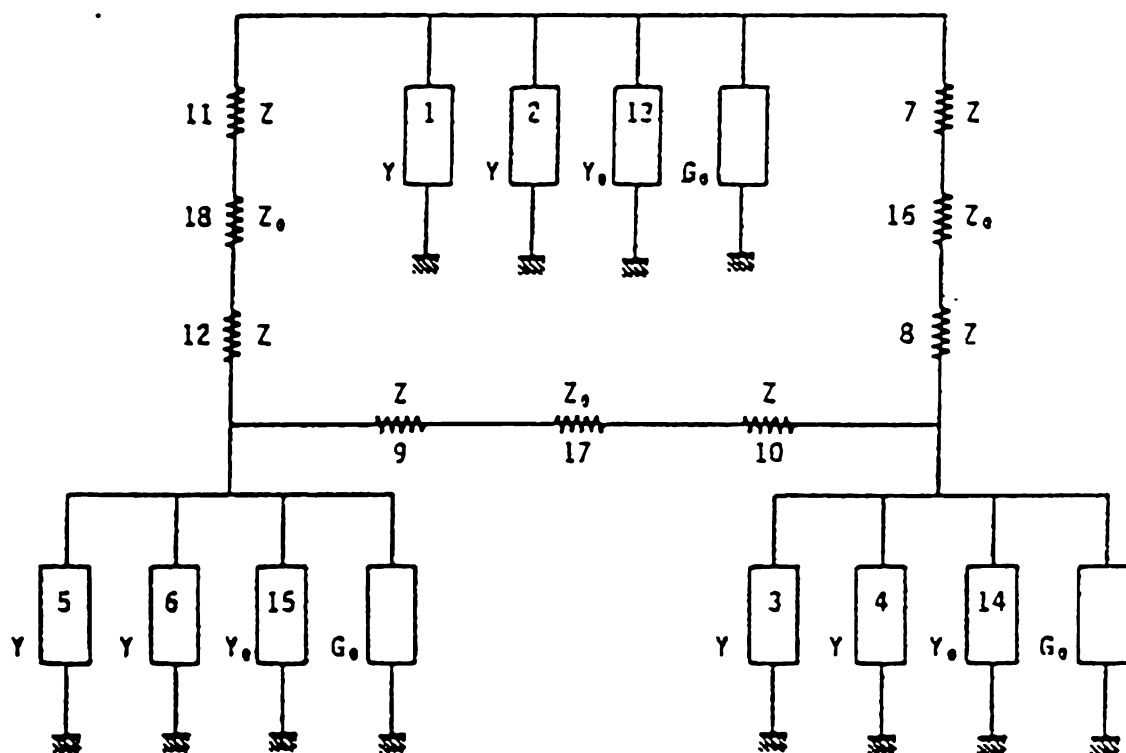


Figure 2.11: Schéma équivalent du noeud ponctuel asymétrique.

Le noeud condensé symétrique

Dans le cas 3D on ajoute au noeud condensé symétrique décrit par sa matrice Eqn. 2.44 (notation avec les invariants de Riemann) et Eqn. 2.46 (notation classique) des stubs parallèles de longueur $\Delta\ell/2$ (stubs d'admittance ou stubs de permittivité), des stubs parallèles de longueur infini (stubs de conductance ou stubs de pertes) et des stubs série de longueur $\Delta\ell/2$ (stubs d'impédance ou stubs de perméabilité). La matrice obtenue est une matrice de dimension 18×18 (12 dimensions pour les lignes de connexion, 3 dimensions pour les valeurs de ϵ_r et 3 dimensions pour les valeurs de μ_r suivant les 3 axes). Elle a été donnée par Johns 1987 [Joh87] pour le cas d'un milieu diélectrique sans pertes. La matrice a été généralisée pour des milieux avec pertes ohmiques par Naylor et Dessy [Nay90]. Cela n'augmente pas la dimension de la matrice, car les impulsions réparties dans les stubs de pertes ne reviennent plus. La figure 2.12 montre le noeud condensé symétrique avec la notation des impulsions le long des trois axes spatiaux.

Dès 1981, Al-Mukhtar et Sitch ont discuté la technique de synchronisation des impulsions dans une grille parallélépipédique en 3D au moyen d'une variation des valeurs pour ϵ_r et μ_r . Cette technique peut facilement être utilisée dans la matrice du noeud 3D condensé symétrique en permettant des mailles de dimension $u \times v \times w$ selon les axes x , y et z . Les éléments de la matrice du noeud dépendent alors aussi bien de leur position que de l'axe décrit par la ligne (ou colonne) de la matrice.

Les éléments de la matrice sont alors

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{G+Y}{2(G+Y+4)} + \frac{Z}{2(Z+4)} \\
 b = c &= \frac{4}{2(G+Y+4)} \\
 d &= -\frac{G+Y}{2(G+Y+4)} - \frac{Z}{2(Z+4)} \\
 d = i &= \frac{4}{2(4+Z)} \quad h = -\frac{G-Y+4}{G+Y+4} \\
 j &= \frac{4-Z}{4+Z} \quad f = Zd \quad g = Yb
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Ces éléments sont indicés selon leur position dans la matrice. Ils sont relevés dans les deux tableaux 2.3, 2.4 qui suivent (dans la notation initiale)

Par exemple, l'élément S_{29} est égal à

$$S_{29} = c_{xy} = -\frac{G_x + Y_x}{2(G_x + Y_x + 4)} - \frac{Z_y}{2(Z_y + 4)}$$

Pour un bloc de dimension $u \times v \times w$ dans les directions x , y et z les impédances et admittances normalisées sont (d'après Al-Mukhtar et Sitch):

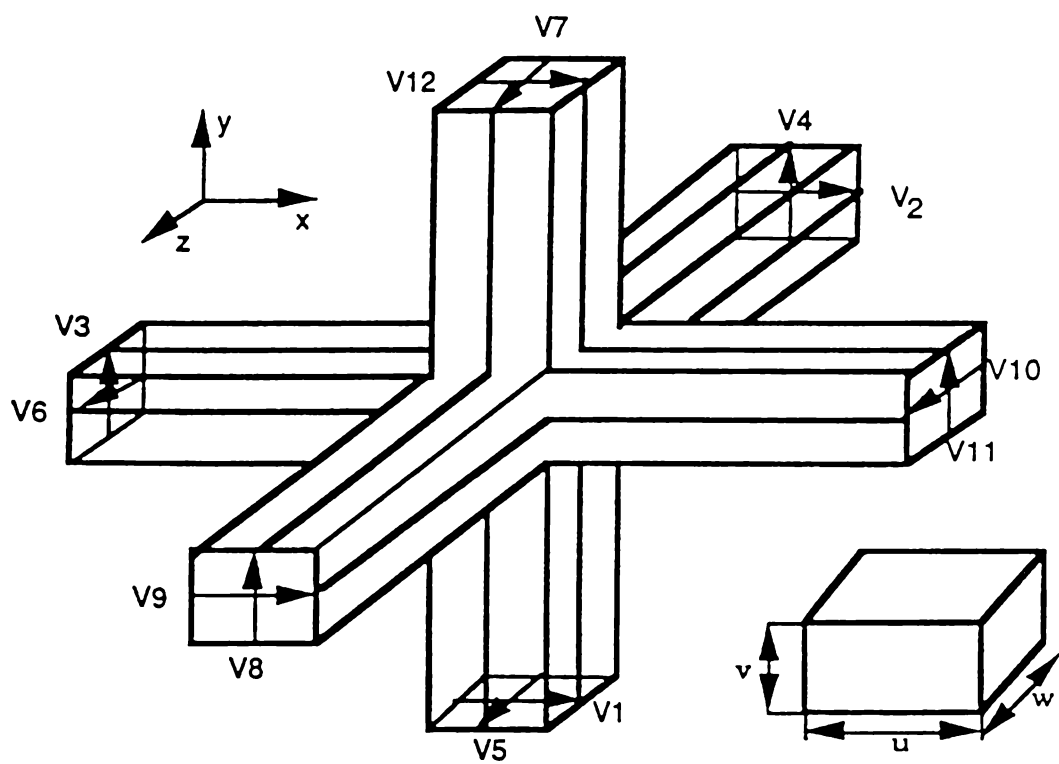


Figure 2.12: Noeud ponctuel symétrique.

colonne			1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y-stub, G-stub			x	x	y	y	z	z	z	y	x
Z-stub			z	y	z	x	x	y	x	x	y
1	x	z	a	b	d	0	0	0	0	0	b
2	x	y	b	a	0	0	0	d	0	0	c
3	y	z	d	0	a	b	0	0	0	b	0
4	y	x	0	0	b	a	d	0	-d	c	0
5	z	x	0	0	0	d	a	b	c	-d	0
6	z	y	0	d	0	0	b	a	b	0	-d
7	z	x	0	0	0	-d	c	b	a	d	0
8	y	x	0	0	b	c	-d	0	d	a	0
9	x	y	b	c	0	0	0	-d	0	0	a
10	z	y	0	-d	0	0	b	c	b	0	d
11	y	z	-d	0	c	b	0	0	0	b	0
12	x	z	c	b	-d	0	0	0	0	0	b
13	x		e	e	0	0	0	0	0	e	e
14	y		0	0	e	e	0	0	0	0	0
15	z		0	0	0	0	e	e	e	0	0
16		x	0	0	0	f	-f	0	f	-f	0
17		y	0	-f	0	0	0	f	0	0	f
18		z	f	0	-f	0	0	0	0	0	0

Tableau 2.3: Matrice de répartition pour le noeud condensé symétrique dans un milieu diélectrique inhomogène avec pertes: première partie.

colonne			10	11	12	13	14	15	16	17	18
Y-stub, G-stub			z	y	x	x	y	z			
Z-stub			y	z	z				x	y	z
1	x	z	0	-d	c	g	0	0	0	0	i
2	x	y	-d	0	b	g	0	0	0	-i	0
3	y	z	0	c	-d	0	g	0	0	0	-i
4	y	x	0	b	0	0	g	0	i	0	0
5	z	x	b	0	0	0	0	g	-i	0	0
6	z	y	c	0	0	0	0	g	0	i	0
7	z	x	b	0	0	0	0	g	i	0	0
8	y	x	0	b	0	0	g	0	-i	0	0
9	x	y	d	0	b	g	0	0	0	i	0
10	z	y	a	0	0	0	0	g	0	-i	0
11	y	z	0	a	d	0	g	0	0	0	i
12	x	z	0	d	a	g	0	0	0	0	-i
13	x		0	0	e	h	0	0	0	0	0
14	y		0	e	0	0	h	0	0	0	0
15	z		e	0	0	0	0	h	0	0	0
16		x	0	0	0	0	0	0	j	0	0
17		y	-f	0	0	0	0	0	0	j	0
18		z	0	f	-f	0	0	0	0	0	j

Tableau 2.4: Matrice de répartition pour le noeud condensé symétrique dans un milieu diélectrique inhomogène avec pertes: deuxième partie.

$$\begin{aligned}
Y_x &= 2 \left[\frac{vw}{u} \frac{\epsilon_r}{c\Delta t} - 2 \right] & Y_y &= 2 \left[\frac{uw}{v} \frac{\epsilon_r}{c\Delta t} - 2 \right] & Y_z &= 2 \left[\frac{uw}{w} \frac{\epsilon_r}{c\Delta t} - 2 \right] \\
Z_x &= 2 \left[\frac{vw}{u} \frac{\mu_r}{c\Delta t} - 2 \right] & Z_y &= 2 \left[\frac{uw}{v} \frac{\mu_r}{c\Delta t} - 2 \right] & Z_z &= 2 \left[\frac{uw}{w} \frac{\mu_r}{c\Delta t} - 2 \right]
\end{aligned}
\tag{2.88}$$

Toutes les lignes de connexion ont l'impédance caractéristique de l'espace libre.

Le pas de temps Δt doit être choisi tel que les impédances et admittances ne deviennent pas négatives.

Comme cela est noté par Al-Mukhtar et Sitch, le principal désavantage de la technique de synchronisation des impulsions par une variation des valeurs effectives pour ϵ_r et μ_r consiste dans le fait que le pas dans le temps Δt peut devenir très petit, en particulier si les valeurs pour u , v et w sont très différentes. Dans ce cas le nombre d'itérations pour simuler un temps total donné — par exemple afin d'obtenir une certaine résolution en fréquence ou afin qu'un signal puisse se propager le long d'une ligne d'une certaine longueur — doit être augmenté de façon correspondante.

La relation entre les impulsions de Riemann et les champs a été donnée par Johns [Joh87]:

$$\begin{aligned}
E_x &= 2 \left[V_1^{\text{inc}} + V_2^{\text{inc}} + V_9^{\text{inc}} + V_{12}^{\text{inc}} + Y_x V_{13}^{\text{inc}} \right] / u [4 + Y_x] \\
E_y &= 2 \left[V_3^{\text{inc}} + V_4^{\text{inc}} + V_8^{\text{inc}} + V_{11}^{\text{inc}} + Y_y V_{14}^{\text{inc}} \right] / v [4 + Y_y] \\
E_z &= 2 \left[V_5^{\text{inc}} + V_6^{\text{inc}} + V_7^{\text{inc}} + V_{10}^{\text{inc}} + Y_z V_{15}^{\text{inc}} \right] / w [4 + Y_z] \\
H_x &= 2 \left[V_4^{\text{inc}} - V_5^{\text{inc}} + V_7^{\text{inc}} - V_8^{\text{inc}} - V_{16}^{\text{inc}} \right] / Z_0 u [4 + Z_x] \\
H_y &= 2 \left[-V_2^{\text{inc}} + V_6^{\text{inc}} + V_9^{\text{inc}} - V_{10}^{\text{inc}} - V_{17}^{\text{inc}} \right] / Z_0 v [4 + Z_y] \\
H_z &= 2 \left[V_1^{\text{inc}} - V_3^{\text{inc}} + V_{11}^{\text{inc}} - V_{12}^{\text{inc}} - V_{13}^{\text{inc}} \right] / Z_0 w [4 + Z_z]
\end{aligned}
\tag{2.89}$$

La vitesse des impulsions dans la grille c_0 est égale au module des valeurs propres $2\sqrt{em}$. Par contre, les ondes planes ont une vitesse de propagation \sqrt{em} . Les impulsions se propagent donc 2 fois plus vite qu'un front d'une onde plane. Autrement dit, la vitesse d'une onde plane en espace libre dans la grille est $c_0/2$.

La matrice de répartition donnée plus haut — ainsi que les murs électriques et magnétiques discutés plus haut — permettent de simuler des éléments de guides en haute fréquence tel que des résonateurs ou guides rectangulaires remplis en partie avec des diélectriques à pertes (p. ex. détermination des fréquences de coupure des cavités et des guides), des lignes micro-rubans avec des discontinuités quelconques (p. ex. caractérisation des lignes et des discontinuités des lignes par des paramètres S_{ij}) aussi bien que la propagation et la diffraction d'impulsions électromagnétiques.

Comme les calculs en 3D demandent beaucoup d'espace mémoire (p. ex. un calcul avec $100 \times 100 \times 100$ noeuds demande $10^6 \times 18 \times 4$ octets = 72 Mega octets), pour certains de ces calculs il est nécessaire d'appliquer des conditions d'espace ouvert aux limites du domaine de calcul. Les conditions d'espace ouvert permettent aux ondes de sortir librement du domaine de calcul. Cela permet de tronquer le domaine de calcul aux endroits où les impulsions se propagent comme dans l'espace libre, et de minimaliser le domaine de calcul de façon qu'il ne contienne que les structures (p. ex. une discontinuité micro-ruban) considérées. Nous parlerons de ces conditions dans le Chapitre 3.

Chapitre 3

La méthode TLM en espace ouvert: Les conditions aux limites absorbantes

3.1 Introduction

Afin de simuler la propagation des champs dans des *problèmes d'espace ouvert* (p. ex. afin de déterminer un diagramme de rayonnement) la distribution des champs pour des temps longs ne peut pas être supposée limitée dans l'espace. D'autre part, chaque grille introduite sur ordinateur est limitée par l'espace mémoire donné. Dans les calculs, la grille doit être tronquée et les impulsions venant de la partie extérieure de la grille ne sont pas connues. Afin d'assurer que les ondes créées à l'intérieur du domaine de calcul peuvent sortir librement de la grille, des conditions absorbantes aux limites doivent être introduites. Ces conditions absorbantes aux limites peuvent être introduites sous forme de *schémas d'extrapolation* dans lesquels les impulsions entrant aux noeuds limites sont estimées par les valeurs des impulsions qui se propagent dans les noeuds internes.

Toutes les conditions absorbantes aux limites ne sont pas des schémas d'extrapolation. Jusqu'à maintenant, la "*charge adaptée*" (matched-termination) de la grille est largement utilisée: Cette méthode consiste à appliquer une impédance de l'espace extérieur égale à l'impédance de la grille. Si la grille est placée dans l'espace libre, l'adaptation consiste à annuler toutes les impulsions incidentes vers la grille. Les charges adaptées absorbent parfaitement uniquement les ondes partant de la grille avec une direction de propagation perpendiculaire à la frontière. Pour des angles d'incidence différents de 0° des réflexions résiduelles demeurent, dues à une absorption insatisfaisante des ondes.

Quelques conditions d'extrapolation simples ont été proposées p. ex. par Higdon [Hig86]. Une approche plus générale de construction des schémas d'extrapolation est fondée sur des

discretisations des approximations de l'équation d'onde unidirectionnelle. L'équation d'onde unidirectionnelle y est définie comme limite d'un système d'équations à dérivées partielles: Elle décrit le flux d'ondes d'un demi-espace à un autre et dans une direction seulement.

D'autres techniques d'extrapolation en 2D [Sin92], extrapolation du deuxième ordre des équations unidirectionnelles en 2D et 3D [Mor92], d'ordres plus élevés d'approximation de l'équation unidirectionnelle d'après Higdon et Keys et d'ordres plus élevés de l'expansion de Taylor ont été envisagées et sont rapportées dans la littérature: Chen et al. [Che93] parlent d'une bonne absorption des ondes en utilisant la condition de Higdon-Keys [Che93]. Ils ont trouvé qu'un ordre d'approximation supérieure à 3 n'améliore pas la précision de la solution. Ils expliquent cela par le fait que la méthode TLM est limitée au 3ième ordre environ dans les opérations à différences finies et pour cela est insensible aux dérivées d'ordres élevés demandées par la condition de Higdon-Keys. Pourtant nous allons voir dans la suite qu'en 2D la qualité d'absorption s'améliore avec l'augmentation de l'ordre jusqu'à l'ordre 5. Dans leur article ils présentent un schéma aux limites basé sur la discrétisation "box-scheme" de la formule de Higdon-Keys qui est numériquement fortement divergent. Dans un article ultérieur, Eswarappa et al. [Esw94] ont présenté un schéma de discrétisation qui est plus stable. Ils sont néanmoins limités dans la précision: Leurs résultats pour le troisième ordre d'approximation ne sont que légèrement supérieurs à ceux obtenus avec un schéma du deuxième ordre.

Comme dans la suite de nos calculs, nous utilisons en général le SCN (sauf si indiqué autrement), les dérivées dans le temps doivent toujours être prises sur deux pas de temps; C'est le temps pour une impulsion venant d'un bras d'un noeud arrive au même bras dans la couche voisine de noeuds. Cette caractéristique de propagation est due au caractère d'ondes lentes du SCN.

3.2 Conditions absorbantes aux limites

Dans ce qui suit, nous allons d'abord présenter des schémas d'extrapolation de premier et deuxième ordre. Ils peuvent être utilisés directement pour estimer les impulsions qui pénètrent dans une grille limitée en espace. Dans la suite, nous discutons une approche très générale pour décrire des ondes partant d'un domaine de calcul, basée sur l'équation d'onde unidirectionnelle. L'équation d'onde unidirectionnelle peut être définie comme limite d'une hiérarchie d'équations à dérivées partielles, obtenues par approximation de la relation de dispersion pour l'équation d'onde unidirectionnelle dans l'espace de Fourier. L'équation unidirectionnelle décrit le flux d'énergie d'un demi-espace à l'autre.

Nous dériverons une hiérarchie des approximations de l'équation unidirectionnelle sous forme d'une hiérarchie d'équations à dérivées partielles. Nous présenterons 7 familles pour cette hiérarchie correspondant aux 7 méthodes d'approximation. Nous discuterons finalement plusieurs formulations alternatives de la hiérarchie des équations à dérivées partielles et nous discuterons le coefficient de réflexion théorique pour les deux premiers ordres d'approximation.

Afin d'obtenir des schémas d'extrapolation à partir de la hiérarchie d'équation unidirec-

tionnelle, les équations à dérivées partielles doivent être discrétisées. Cela va être fait dans la Section qui suit. Nous y discutons aussi les résultats obtenus, en testant ces schémas numériquement.

3.2.1 Extrapolation en espace temps

L'extrapolation en espace-temps a été discutée par exemple par Higdon [Hig86]. Le principe est montré sur la Fig. 3.1: les impulsions partant de la grille sont supposées avoir la forme d'ondes planes se propageant dans une direction perpendiculaire aux limites. Le diagramme correspond dans l'espace (voir axe espace) à deux représentations de la fonction d'onde pour des temps différents t_{n-1} et t_{n+1} . Dans le temps (voir axe temps), le diagramme correspond à deux représentations de la fonction d'onde aux positions x_0 et x_1 .

Regardons le diagramme dans l'espace: La prédiction de la fonction d'onde discrète aux limites en x_0 est faite en utilisant les valeurs en x_1 et x_2 aux temps t_{n-1} respectivement t_{n-3} (Rappelons que $n = 2$ est le temps pour qu'une impulsion avance d'un bras d'un noeud au même bras du noeud suivant).

L'extrapolation en espace-temps du premier et du deuxième ordre se fait en annulant les dérivées correspondantes. Au premier ordre:

$$u_{0jk}^{n+1} - u_{1jk}^{n-1} = 0 \quad (3.1)$$

Ici et dans ce qui suit nous notons $u_{ijk}^n = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z; n\Delta t)$ la fonction d'onde discrète sur la grille.

Au deuxième ordre:

$$u_{0jk}^{n+1} - 2u_{1jk}^{n-1} + u_{2jk}^{n-3} = 0 \quad (3.2)$$

L'extrapolation espace-temps n'absorbe complètement que les ondes ayant une direction d'incidence perpendiculaire aux limites. Le premier ordre d'extrapolation espace-temps est équivalent au première ordre d'approximation de l'équation unidirectionnelle en utilisant des coefficients de Padé (voir ci-dessous), discrétisés par des opérateurs à différences finies du premier ordre. Higdon [Hig86] donne une formule généralisée pour des extrapolations espace-temps d'ordre quelconque. Il a montré que l'extrapolation espace-temps d'ordre supérieur à 2 est instable.

3.2.2 L'équation unidirectionnelle et le problème d'approximation

Les solutions de l'équation d'onde en 2D

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0 \quad (3.3)$$

sont données par

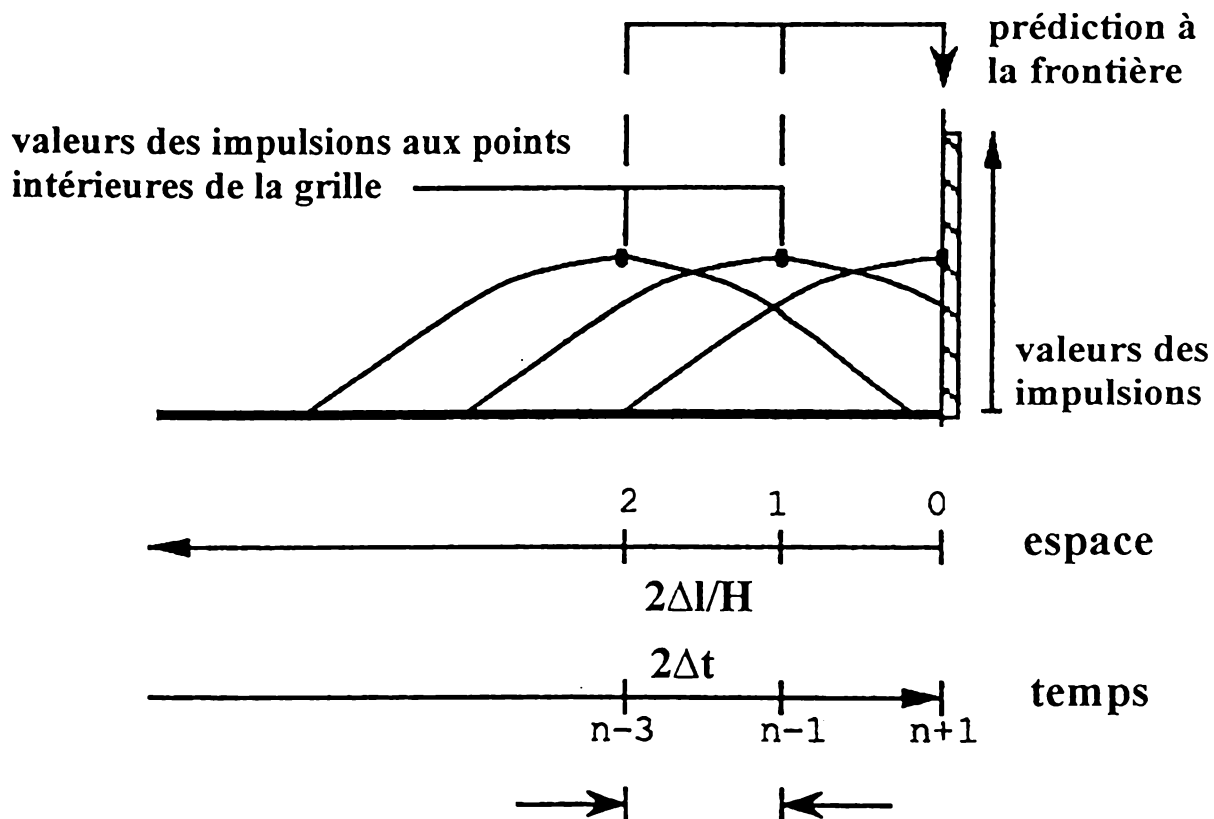


Figure 3.1: *Extrapolation des ondes planes dans l'espace et dans le temps.*

$$u(x, t) = u_0 \exp j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

où $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ désigne le vecteur d'onde. $\mathbf{x} = (x, y)$ désigne la variable spatiale, t désigne la variable temporelle et c désigne la vitesse de phase de l'onde. L'insertion de l'Eqn. 3.4 dans l'Eqn. 3.3 donne la relation de dispersion pour des ondes planes

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2) \quad (3.5)$$

Puisque l'onde $u(\mathbf{x}, t)$ est une solution fondamentale de l'équation d'onde (c'est à dire que toutes les solutions possibles peuvent être obtenues par superposition de l'Eqn. 3.3), la relation de dispersion caractérise l'équation d'onde uniquement. En plus, puisque ω et \mathbf{k} sont des variables duales de t et \mathbf{x} , nous pouvons dire que la relation de dispersion représente l'équation d'onde dans l'espace de Fourier. De l'Eqn. 3.5 nous obtenons alors une équation d'onde décrivant un flux d'ondes planes d'un demi-espace $\{x; x \leq 0\}$ dans le demi-espace $\{x; x \geq 0\}$ si nous n'admettons que des ondes pour lesquelles $k_x \geq 0$. Nous écrivons alors

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - s^2} \quad (3.6)$$

où s est donné par

$$s = \frac{c}{\omega} k_y = \sin \Theta$$

Nous appelons l'Eqn. 3.6 la relation de dispersion de l'équation unidirectionnelle. Afin d'obtenir une équation à dérivées partielles correspondante, nous devons approcher la racine dans cette équation par une fonction rationnelle $r(s)$:

$$\sqrt{1 - s^2} \approx r(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \quad (3.7)$$

Ici $P_m = \sum_{i=0}^m p_i s^i$ et $Q_n = \sum_{i=0}^n q_i s^i$ sont des polynômes de degré m et n dans le sinus de l'angle incident s .

En insérant l'Eqn. 3.7 dans la relation de dispersion pour l'équation unidirectionnelle Eqn. 3.6 on aboutit à une relation de dispersion pour une équation unidirectionnelle, approchée par

$$\sum_{i=0}^n q_i \left(\frac{k_y c}{\omega} \right)^i k_x c = \omega \sum_{i=0}^m p_i \left(\frac{k_y c}{\omega} \right)^i \quad (3.8)$$

En éliminant le dénominateur, nous pouvons écrire:

$$\sum_{i=0}^n q_i c^{i+1} (jk_y)^i (jk_x) (j\omega)^{K-i} = \sum_{i=0}^m p_i c^i (jk_y)^i (j\omega)^{K-i+1} \quad (3.9)$$

où $j = \sqrt{-1}$. Ici nous avons introduit $K = \max \{n, m - 1\}$.

Pour les ondes de la forme de l'Eqn. 3.4, nous obtenons une hiérarchie d'équations à dérivées partielles avec une précision d'approximation croissante par les substitutions $\partial_t = j\omega$, $\partial_x = jk_x$ and $\partial_y = jk_y$. Pour $m = n$ et $m = n + 2$ cela donne

$$\begin{aligned} (0,0) \quad \partial_x u - \frac{p_0}{c} \partial_t u &= 0 \\ (2,0) \quad \partial_x \partial_t u - \frac{p_0}{c} \partial_t \partial_t u - c p_2 \partial_y \partial_y u &= 0 \\ (2,2) \quad q_0 \partial_x \partial_t^2 u + c^2 q_2 \partial_x \partial_y^2 u - \frac{p_0}{c} \partial_t^3 u - c p_2 \partial_t \partial_y^2 u &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nous appelons (m, n) l'ordre de l'approximation. Dans ce qui suit, nous appellerons l'Eqn. 3.10 *formulation hiérarchique symétrique* du problème d'approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle. La restriction à $m = n$, $m = n + 2$ donne des équations à dérivées partielles bien posées (Trefethen [Tre86]). Cette restriction admet toujours des approximations d'ordre arbitrairement élevé à l'équation d'onde unidirectionnelle. Les coefficients p_i et q_i des polynômes P et Q doivent être déterminés en approchant la racine dans la relation de dispersion de l'onde unidirectionnelle (voir Fig. 3.2). Parce que la relation de dispersion est symétrique en s , nous exigeons la symétrie de $r(s)$ telle que $p_i = q_j = 0$ pour tous i, j impair. Halpern et Trefethen [Hal88] ont proposé différentes méthodes pour approcher la racine, chacune menant à une famille d'approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle. Les 7 familles proposées par Halpern et Trefethen sont les suivantes:

1. Approximation de Padé Soit $\sqrt{1-s^2}$ écrit sous forme d'une série de Taylor autour de $s = 0$

$$f(s) \equiv \sqrt{1-s^2} \cong \sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)} s^n$$

L'ordre (m, n) de l'approximation de Padé $r(s)$ à $\sqrt{1-s^2}$ est l'unique fonction rationnelle de sorte que l'expansion de Taylor est conforme à la série de Taylor de $\sqrt{1-s^2}$ jusqu'à l'ordre $m + n + 2$:

$$r(s) - \sqrt{1-s^2} = O[s^{m+n+2}]$$

Avec l'approximation de Padé les points d'interpolation sont tous égaux à $s = \sin \Theta = 0$. Notons que pour la hiérarchie $(m, n) = (0, 0), (0, 2), (2, 2), (4, 2) \dots$ l'approximation de Padé est équivalente à la troncature du développement en fraction continue

$$\sqrt{1-s^2} \cong 1 - \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2} \dots$$

2. Interpolation aux Points de Chebyshev L'interpolation aux points de Chebyshev se fait sur une infinité de points dans l'intervalle $[-1, 1]$. Les points de Chebyshev sont

definis par la condition des espacements égaux des angles d'absorption totale Θ :

$$\begin{aligned} s_k &= \sin \Theta_k, \\ \Theta_k &= -\pi/2 + [\pi(k - 0.5)]/2K \quad 1 \leq k \leq 2K \end{aligned}$$

Ici $K = (m + n + 2)/2$ est le nombre d'angles d'absorption totale. La fonction rationnelle $r(s)$ peut être construite en utilisant une procédure selon Newton (1964) (comp. [Hal88]):

Soit P un polynôme de degré K égal à zéro pour $\sqrt{1 - s_k^2}$ pour tout k . Soit

$$r(s) = \frac{P(t) + P(-t)}{[-P(t) + P(-t)]/t} \quad (3.11)$$

avec $t = \sqrt{1 - s^2}$. Alors $r(s) = \sqrt{1 - s^2}$ est équivalent à $P(t) + P(-t) = -P(t) + P(t)$ ou encore $P(t) = 0$. Le polynôme $r(s)$ interpole $\sqrt{1 - s^2}$ aux points $\pm s_k$.

3. Moindres Carrés ou L^2 L'approximation par les moindres carrés d'ordre (m, n) de la relation de dispersion pour l'équation d'onde unidirectionnelle est donnée par

$$\|\sqrt{1 - s^2} - r(s)\|_2 = \min_{\{p_i, q_i\}} \left\{ \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \right\}$$

où $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 f(s) ds}$ est la norme des moindres carrés. Le problème de minimisation peut être résolu en utilisant $s_1 \dots s_K$ comme variables indépendantes qui sont à ajuster. La procédure de Newton décrite plus haut peut être utilisée pour construire le polynôme interpolant. Halpern et al. ont déterminé les s_k de cette façon.

4. Chebyshev ou L^∞ Afin d'obtenir l'approximation de type Chebyshev nous remplaçons la norme des moindres carrés $\|\cdot\|_2$ par la norme L^∞ :

$$\|f\|_\infty = \max_{s_k \in [-1, 1]} |f(s)|$$

A nouveau, les coefficients p_i, q_i peuvent être évalués par optimisation cyclique des s_k au moyen de la procédure de Newton (Eqn. 3.11).

5. Chebyshev sur un sousintervalle ou L^∞_α Avec cette approximation, la norme L^∞ est toujours utilisée. En plus, l'intervalle d'optimisation correspondant à $\Theta \in [-\alpha, \alpha]$ est limité comme suit

(m,n)	α
(0,0)	10°
(2,0)	20°
(2,2)	45°
(4,2)	60°
(4,4)	75°

Les coefficients p_i , q_i sont trouvés de la même façon que dans le cas de l'approximation de type Chebyshev.

6. Interpolation aux Points de Newman Newman a choisi les points d'interpolation de la façon suivante

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_k &= \sqrt{1 - \xi^{k-2}} \quad 2 \leq k \leq K \\ \text{où} \quad \xi &= \exp \left\{ -1/\sqrt{K-1} \right\} \end{aligned}$$

Pour ce choix de points d'interpolation, Newman a pu montrer que des approximations d'ordre (n, n) ont une erreur L^∞ de l'ordre de $O(\exp -\pi\sqrt{n})$. $K = (m + n + 2)/2$ est toujours le nombre d'angles d'absorption totale et les coefficients p_i , q_i peuvent être évalués par optimisation cyclique au moyen de la procédure de Newton (Eqn. 3.11).

7. Approximation de Chebyshev-Padé Soit $\sqrt{1 - s^2}$ écrit sous forme de série de Chebyshev

$$\sqrt{1 - s^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{3} T_2(x) + \frac{1}{15} T_4(x) + \frac{1}{35} T_6(x) + \dots \right)$$

où T_k est le k ième polynôme de Chebyshev de première espèce. L'ordre (m, n) de l'approximation de Chebyshev-Padé $r(s)$ de $\sqrt{1 - s^2}$ est la fonction rationnelle unique telle que son expansion Chebyshev soit conforme à la série de Chebyshev de $\sqrt{1 - s^2}$ jusqu'à l'ordre $m + n + 2$:

$$r(s) - \sqrt{1 - s^2} = O [T_{m+n+2}(s)]$$

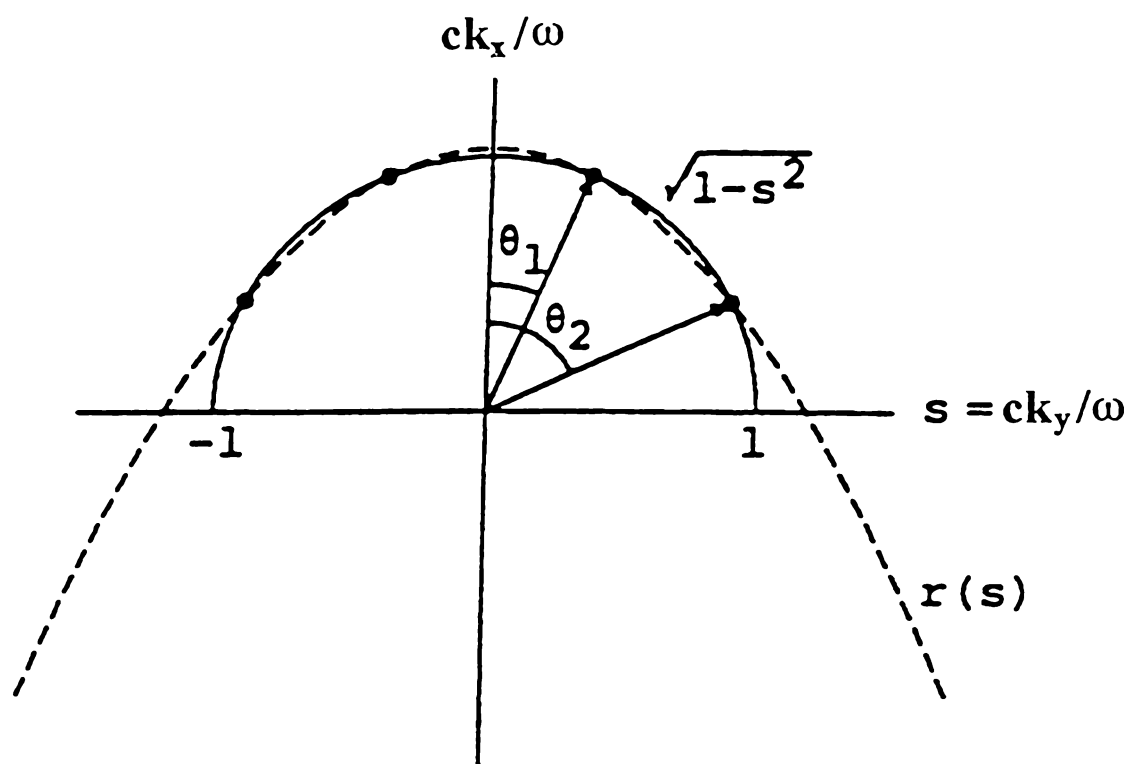


Figure 3.2: Le problème d'approximation.

3.2.3 Une formulation due à Lindmann

La hiérarchie des Eqs. 3.10 peut être exprimée de manière différente. Nous écrivons l'approximation de la fonction rationnelle à $\sqrt{1-s^2}$ sous la forme de Lindmann [Ren92]

$$\sqrt{1-s^2} = p_0 \left[1 + \sum_{m=1}^M \frac{\alpha_m s^2}{1 - \beta_m s^2} \right] \quad (3.12)$$

En substituant l'Eqn. 3.12 dans la relation de dispersion de l'Eqn. 3.5 et en multipliant par la fonction d'onde u on obtient

$$jk_x u - \frac{p_0}{c} j\omega u = \frac{p_0}{c} \sum_{m=1}^M j\omega \frac{\alpha_m s^2}{1 - \beta_m s^2} u \quad (3.13)$$

Nous écrivons alors le membre droit de l'Eqn. 3.13 comme une somme de *fonctions de Lindmann* v_m définies par

$$v_m = j\omega \frac{\alpha_m s^2}{1 - \beta_m s^2} u \quad (3.14)$$

Complété par les substitutions $jk_x = \partial_x$, $j\omega = \partial_t$ au membre gauche de l'Eqn. 3.13 on obtient une hiérarchie d'équations à dérivées partielles qui approchent l'équation d'onde unidirectionnelle.

Les coefficients α_i , β_i dans l'Eqn. 3.19 peuvent être obtenus à partir des coefficients p_i , q_i dans l'Eqn. 3.7 pour une famille d'approximation donnée d'ordre (m, n) avec $m = n$ ou $m = n + 2$ en égalant les deux approximations rationnelles

$$\frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = p_0 \left[1 + \sum_{m=1}^M \frac{\alpha_m s^2}{1 - \beta_m s^2} \right] \quad (3.15)$$

et en comparant les coefficients de même puissance de s . Les coefficients jusqu'à l'ordre $(4, 4)$ ont été obtenus de cette manière.

Afin de résoudre n'importe laquelle des équations à dérivées partielles, nous devons déterminer les fonctions de Lindmann définies par l'Eqn. 3.14. Pour cela nous devons évaluer la fréquence angulaire ω et la composante du vecteur d'onde k_y . Cela est équivalent à évaluer les dérivées partielles dans la direction parallèle à la frontière et dans le temps.

Il est possible d'exprimer l'Eqn. 3.14 sous forme d'une équation à dérivées partielles en utilisant

$$\gamma_1 v_m + \gamma_2 v_m = j\omega \gamma_3 u \quad (3.16)$$

En multipliant l'Eqn. 3.16 par $(1 - \beta_m s^2)$ et en insérant la définition des fonctions de Lindmann (Eqn. 3.14) on obtient les coefficients $\gamma_1 = -\omega^2$, $\gamma_2 = \beta_m c^2 k_y^2$ and $\gamma_3 = -\alpha_m c^2 k_y^2$. Nous pouvons donc écrire l'Eqn. 3.16 comme suit:

$$(j\omega)^2 v_m - \beta_m c^2 (jk_y)^2 v_m = c^2 \alpha_m (j\omega) (jk_y)^2 u \quad (3.17)$$

Avec les substitutions $\partial_t = j\omega$, $\partial_x = jk_x$, $\partial_y = jk_y$, nous obtenons à partir de l'Eqn. 3.13 l'équation d'onde unidirectionnelle sous forme de Lindmann comme ci-dessous

$$\partial_x u - \frac{p_0}{c} \partial_t u = \frac{p_0}{c} \sum_{m=1}^M v_m \quad (3.18)$$

où les fonctions de Lindmann peuvent être déterminées par l'Eqn. 3.17:

$$\partial_t^2 v_m - \beta_m c^2 \partial_y^2 v_m = c^2 \alpha_m \partial_t \partial_y^2 u \quad (3.19)$$

pour $m = 1 \dots M$.

Nous appelons les Eqs 3.18, 3.19 *formulation de Lindmann* du problème d'approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle. Les fonctions de Lindmann sont déterminées le long des frontières par une infinité d'équations à dérivées partielles du deuxième ordre; Elles peuvent être interprétées comme des fonctions de correction à conditions limites d'ordre (0,0) dans les Eqs. 3.10.

3.2.4 Une formulation due à Higdon et Keys

Une troisième possibilité permettant d'écrire une hiérarchie de l'équation d'onde unidirectionnelle est donnée par la condition absorbante aux limites trouvée indépendamment par Higdon [Hig86] et Keys [Key85]

$$\left[\prod_{i=1}^{n+1} (g_i \partial_t - c \partial_x) \right] u = 0 \quad (3.20)$$

où $g_i = \cos \Theta_i$; $i = 1 \dots n+1$ sont des poids dépendant des angles d'absorption totale. Afin de voir que pour ces angles l'onde est complètement absorbée nous appliquons un des facteurs dans le produit de l'Eqn. 3.20 à une onde plane $u = u_0 \exp\{j(k_x x + k_y y) + j\omega t\}$ se propageant avec la vitesse de phase c , incidente à la frontière sous l'angle Θ avec $k_x = |\mathbf{k}| \cos \Theta$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} (g_i \partial_t - c \partial_x) u &= \cos \Theta (j\omega) u - c j k_x u = 0 \\ \iff \cos \Theta \omega - c |\mathbf{k}| \cos \Theta &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est la définition de la vitesse de phase $c = \omega / |\mathbf{k}|$. Nous concluons que pour une telle onde plane la condition aux limites de l'Eqn. 3.20 est satisfaite; L'onde ne va pas être réfléchi à la frontière. Nous appelons l'Eqn. 3.20 *formulation de Higdon-Keys* du problème d'approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle. Ici nous appelons $n+1$ l'ordre de l'approximation.

Nous pouvons exprimer la condition aux limites de Higdon-Keys dans la forme hiérarchique. Considérons d'abord la relation de dispersion approchée générale de l'Eqn. 3.9. Nous demandons la symétrie $r(s) = r(-s)$ et nous remplaçons k_y^2 par $\omega^2/c^2 - k_x^2$ (en utilisant la relation de dispersion pour des ondes planes). Il en résulte pour $m = n = 2$ que

$$q_0 c^3 \partial_x^3 - \frac{p_2}{q_2} c^2 \partial_x^2 \partial_t - \frac{1 + q_2}{q_2} c \partial_x \partial_t^2 + \frac{p_0 + p_2}{q_2} \partial_t^3 = 0$$

D'autre part, la formulation Higdon-Keys (Eqn. 3.20) devient pour $n + 1 = 3$

$$c^3 \partial_x^3 - (g_1 + g_2 + g_3) c^2 \partial_x^2 \partial_t + (g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3) c \partial_x \partial_t^2 - g_1 g_2 g_3 \partial_t^3 = 0$$

La comparaison des coefficients donne un système non linéaire d'équations avec les coefficients pour les deux formulations donnés par les relations

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 + g_3 &= \frac{p_2}{q_2} \\ g_1 g_2 + g_1 g_3 + g_2 g_3 &= -\frac{1 + q_2}{q_2} \\ g_1 g_2 g_3 &= -\frac{p_0 + p_2}{q_2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Il est simple de vérifier que les Eqs. 3.21 sont satisfaites pour des conditions de Padé ($p_0 = 1.0$, $p_2 = -0.75$, $q_0 = 1.0$, $q_2 = -0.25$, $g_1 = 1.0$, $g_2 = 1.0$, $g_3 = 1.0$).

Pour le cas général nous demandons encore la symétrie $r(s) = r(-s)$. En utilisant la relation de dispersion (Eqn. 3.5) nous obtenons l'Eqn. 3.9 en toute généralité (nous permettons aux coefficients q_{2j} d'être nuls):

$$\left[\sum_{j=0}^{n/2} \partial_t^{n-2j} c^{2j} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 \right)^j (q_{2j} c \partial_x - p_{2j} \partial_t) \right] u = 0$$

ce que nous écrivons:

$$\sum_{j=0}^{n/2} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} c^{2i} \left[q_{2j} c \partial_x^{(2i+1)} \partial_t^{n+1-(2i+1)} - p_{2j} \partial_x^{(2i)} \partial_t^{n+1-(2i)} \right] u = 0 \quad (3.22)$$

avec $\binom{j}{i} = \frac{j!}{i!(j-i)!}$.

D'autre part, on a

$$\prod_{j=1}^i (a_j - b) = \sum_{k=0}^i (-1)^k b^k \sum_{\sigma_{i-k}} a_{\sigma_{i-k}(1)} \dots a_{\sigma_{i-k}(i-k)} \quad (3.23)$$

où $\sigma_{i-k}(1) \dots \sigma_{i-k}(i-k)$ sont $i-k$ valeurs différentes de l'ensemble $\{1, 2, \dots, i\}$. Par exemple, $i=3$, $i-k=2$ donne $\{\sigma_2(1), \sigma_2(2)\} = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. Si tous les a_i sont égaux, il en découle la formule binomiale. Pour cela, avec $a_j = \partial_t g_j$ et $b = \partial_x c$ nous pouvons écrire l'Eqn. 3.20:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left\{ \sum_{\sigma_{n+1-k}} g_{\sigma_{n+1-k}(1)} \times \dots \times g_{\sigma_{n+1-k}(n+1-k)} \right\} c^k \partial_t^{n+1-k} \partial_x^k u = 0 \quad (3.24)$$

ou, en introduisant $i = 0 \dots n/2$, n pair nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n/2} c^{2i} \left\{ \sum_{\sigma_{n+1-2i}} g_{\sigma_{n+1-2i}(1)} \times \dots \times g_{\sigma_{n+1-2i}(n+1-2i)} \right\} \partial_t^{n+1-2i} \partial_x^{2i} u \\ & - \sum_{i=0}^{n/2} c^{2i+1} \left\{ \sum_{\sigma_{n-2i}} g_{\sigma_{n-2i}(1)} \times \dots \times g_{\sigma_{n-2i}(n-2i)} \right\} \partial_t^{n+1-(2i+1)} \partial_x^{2i+1} u = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si nous comparons les sommations des Eqs. 3.22 et 3.25 nous réalisons qu'elles sont de la même forme. Si nous comparons les coefficients à la même puissance $2i$ (paire) nous trouvons

$$\sum_{\sigma_{n+1-2i}} g_{\sigma_{n+1-2i}(1)} \times \dots \times g_{\sigma_{n+1-2i}(n+1-2i)} = \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \binom{i}{j} p_{2i} \quad (3.26)$$

et à la même puissance $2i+1$ (impaire) nous trouvons

$$\sum_{\sigma_{n-2i}} g_{\sigma_{n-2i}(1)} \times \dots \times g_{\sigma_{n-2i}(n-2i)} = \sum_{j=0}^i (-1)^{j+1} \binom{i}{j} q_{2i} \quad (3.27)$$

Il est simple de vérifier que les relations 3.26, 3.27 se réduisent pour $m = n = 2$ aux Eqs. 3.21.

Commentaires:

1. Si nous demandons que la relation de dispersion soit approchée exactement à $n + 1$ angles Θ_i avec des poids $g_i = \cos \Theta_i$, les $n + 2$ Eqs. 3.26, 3.27 déterminent uniquement les $n + 2$ paramètres inconnus p_{2i} , q_{2i} , $i = 0 \dots n/2$. Afin de trouver les p_i et q_i des angles d'absorption totale, la construction du polynôme interpolant selon Newton (page 87) peut être utilisée.
2. L'ordre d'approximation (m, n') avec $n' + 2 = m$ est contenu dans l'Eqn. 3.22 si nous écrivons $q_{2n} \equiv q_{2n'+2} = 0$ ($n = m$). Le nombre maximal d'angles qui peut être interpolé dans ce cas est $(m + n' + 2)/2 = n$; Il s'en suit que $g_{n+1} = 0$: Il n'y a pas d'angle d'absorption totale correspondant à g_{n+1} .
3. La formulation hiérarchique permet en général une distribution asymétrique des angles d'absorption totale ainsi que des approximations de la racine dans l'Eqn. 3.6 avec moins que $n + 1$ angles d'absorption totale. En ce sens la formulation hiérarchique est plus générale que la formulation de Higdon-Keys. Toujours est-il que *n'importe quelle approximation symétrique de l'équation d'onde unidirectionnelle avec un nombre maximal d'angles d'absorption possède une unique formulation Higdon-Keys et une formulation hiérarchique symétrique correspondante.*

3.2.5 Coefficient de réflexion théorique des approximations de l'équation d'onde unidirectionnelle

Le coefficient de réflexion des ondes aux frontières est une mesure de la qualité des conditions absorbantes aux limites. Afin de déterminer ce coefficient de réflexion, nous considérons une onde plane incidente à la frontière $x = 0$ à $t = 0$

$$u(x, t; t \leq 0) = u_i \exp j(\omega t - kx)$$

où u_i est l'amplitude de l'onde incidente. A la frontière, il y a un changement brusque de la relation de dispersion due au remplacement de la racine par la fonction rationnelle $r(s)$. Le changement dans la relation de dispersion provoque un changement de la vitesse de phase et donne une partie réfléchie et une partie transmise de l'onde

$$u(x, t; t \geq 0) = u_r \exp j(\omega t + kx) + u_t \exp j(\omega t - kx)$$

où u_r est l'amplitude de l'onde réfléchie et u_t est l'amplitude de l'onde transmise. Le coefficient de réflexion théorique Γ ou *coefficient de Fresnel pour l'onde réfléchie* est défini comme rapport de l'amplitude réfléchie sur l'amplitude incidente

$$\Gamma \equiv \frac{u_r}{u_i}$$

Si l'amplitude incidente u_i est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence on obtient le coefficient de Fresnel pour l'onde réfléchie à partir de la loi de Snellius comme dans [Jon86, Chapitre 6.6].

$$\Gamma = \frac{A - B}{A + B} \quad (3.28)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{c_b}{c} \sin \Theta \cos \Theta \\ B &= \sin \Theta \sqrt{1 - \left(\frac{c_b}{c}\right)^2 \sin^2 \Theta} \end{aligned}$$

où c est la vitesse de phase pour le schéma intérieur et c_b est la vitesse de phase pour la condition aux limites.

A partir de la relation de dispersion du premier ordre

$$\omega - p_0 c k_x = 0$$

nous obtenons le rapport entre la vitesse de phase de la condition aux limites du premier ordre (en utilisant les coefficients de Padé) et la vitesse de phase pour le schéma intérieur:

$$\frac{c_b}{c} = \cos \Theta \quad (3.29)$$

où nous avons utilisé $k_x = |\mathbf{k}| \cos \Theta$.

A partir de la relation de dispersion du deuxième ordre

$$p_0 \omega^2 - c k_x \omega + c^2 p_2 k_y^2 = 0$$

nous obtenons le rapport entre la vitesse de phase de la condition aux limites du deuxième ordre (en utilisant les coefficients de Padé) et la vitesse de phase du schéma intérieur:

$$\left(\frac{c_b}{c}\right)_{\pm} = \frac{1}{2} \cos \Theta \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \Theta} \quad (3.30)$$

Ici nous avons deux branches (\pm) pour les rapports entre vitesses de phase: La branche avec le signe “+” détermine le coefficient de réflexion alors que la branche avec le signe “-” donne une vitesse de phase négative et ne correspond pas à une solution physique.

Les coefficients de réflexion de conditions aux limites du premier ou du deuxième ordre sont obtenus en insérant l’Eqn. 3.29 (respectivement l’Eqn. 3.30) dans les constantes A et B de l’Eqn. 3.28.

Dans la littérature nous trouvons une autre quantité aussi appelée “coefficient de réflexion” (p.ex. [Ren92]):

$$\Gamma' = \frac{r(s) - \sqrt{1 - s^2}}{r(s) + \sqrt{1 - s^2}} \quad (3.31)$$

Cette expression est une mesure de la qualité d'approximation de la relation de dispersion au moyen de la fonction rationnelle $r(s)$; Elle est égale à zéro pour des ondes incidentes sous l'angle d'absorption totale et elle tend vers zéro lorsque l'ordre d'approximation augmente.

Les valeurs du coefficient de Fresnel pour l'onde réfléchie et la qualité d'approximation selon l'Eqn. 3.31 sont montrées dans la figure 3.3 pour des coefficients de Padé et des angles entre 0 et 90°.

Le coefficient de réflexion du premier ordre est sous-estimé par l'Eqn. 3.31. Le coefficient de réflexion du deuxième ordre est bien au dessous du coefficient de premier ordre et est également sous-estimé par l'Eqn. 3.31.

3.2.6 La théorie des zones absorbantes

La condition des zones absorbantes ou "matched layer technique" peut être dérivée comme suit [Ber94]: Considérons le cas TE avec $E_z = H_x = H_y = 0$. Les équations pour un milieu adapté ayant une conductivité électrique σ et une conductivité magnétique σ^* sont

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \partial_t E_x + \sigma E_x &= \partial_y H_z \\ \epsilon_0 \partial_t E_y + \sigma E_y &= -\partial_x H_z \\ \mu_0 \partial_t H_z + \sigma^* H_z &= \partial_y E_x - \partial_x E_y\end{aligned}\tag{3.32}$$

Considérons une onde plane d'amplitude E_0 incidente sous l'angle u comme le montre la figure 3.4. Les 3 composantes des champs sont alors données par

$$\begin{aligned}E_x &= -E_0 \sin \phi \exp\{i\omega(t - \alpha x - \beta y)\} \\ E_y &= E_0 \cos \phi \exp\{i\omega(t - \alpha x - \beta y)\} \\ H_z &= H_{z_0} \exp\{i\omega(t - \alpha x - \beta y)\}\end{aligned}\tag{3.33}$$

L'introduction dans les équations 3.32 donne des relations entre α , β , E_0 et H_{z_0} :

$$E_0 \sin \phi (\epsilon_0 i\omega + \sigma) = \beta i\omega H_{z_0}\tag{3.34}$$

$$E_0 \cos \phi (\epsilon_0 i\omega + \sigma) = \alpha i\omega H_{z_0}\tag{3.35}$$

$$E_0 i\omega (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi) = (\mu_0 i\omega + \sigma^*) H_{z_0}\tag{3.36}$$

Nous calculons à partir de ces équations, l'impédance de l'onde $Z = E_0/H_{z_0}$ comme suit. La division de l'Eqn. 3.34 par l'Eqn. 3.35 donne

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}\tag{3.37}$$

Nous calculons α à partir de l'Eqn. 3.35 et de l'Eqn. 3.36. Pour cela nous déterminons d'abord H_{z_0} à partir de l'Eqn. 3.36:

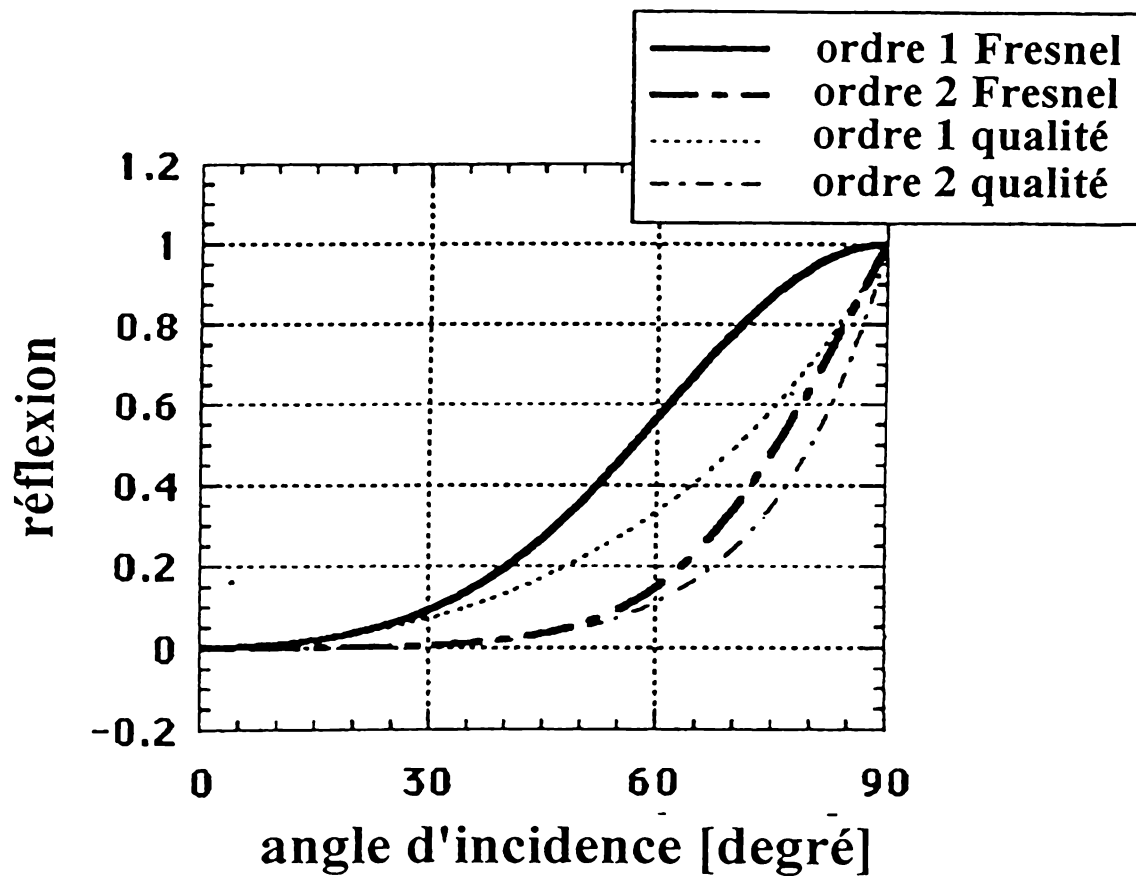


Figure 3.3: Coefficients de réflexion théoriques des conditions aux limites du premier et deuxième ordre.

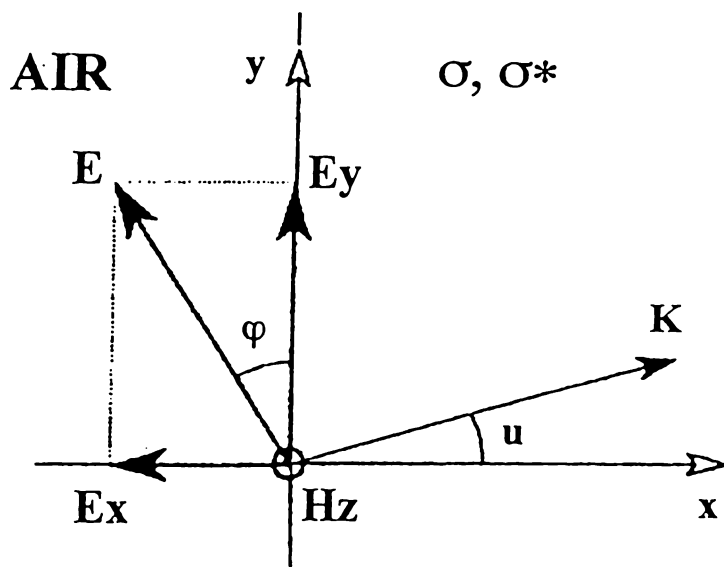


Figure 3.4: *Le problème électrique transverse.*

$$H_{z_0} = E_0 i\omega \frac{\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi}{\mu_0 i\omega + \sigma^*} \quad (3.38)$$

A partir de l'équation 3.35 nous obtenons α^2 tel que:

$$\alpha = \mp i \frac{\cos \phi}{\omega} \sqrt{(\epsilon_0 i\omega + \sigma)(\mu_0 i\omega + \sigma^*)} \quad (3.39)$$

De même on trouve avec l'Eqn. 3.37 β^2 tel que:

$$\beta = \mp i \frac{\sin \phi}{\omega} \sqrt{(\epsilon_0 i\omega + \sigma)(\mu_0 i\omega + \sigma^*)} \quad (3.40)$$

L'introduction de α dans l'Eqn. 3.35 donne l'impédance

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_0}{H_{z_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0 i\omega + \sigma^*}{\epsilon_0 i\omega + \sigma}} \quad (3.41)$$

Nous obtenons comme condition d'adaptation $Z_{\text{TE}} = Z_{\text{AIR}}$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (3.42)$$

L'onde incidente doit être une onde TE avec H_z dans le plan de la frontière. La même argumentation donne le même résultat pour une onde TM avec E_z parallèle à la frontière.

Les amplitudes dans une zone absorbante sont obtenues par insertion de α et β dans l'Eqn. 3.33, par exemple pour E_x :

$$E_x = E_0 \sin \phi e^{i\omega t} e^{-\cos \phi \xi x} e^{-\sin \phi \xi y} \quad (3.43)$$

avec

$$\xi = -\frac{i\omega}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0}\right) \left(1 + \frac{\sigma^*}{i\omega\mu_0}\right)} \quad (3.44)$$

Par exemple, pour l'incidence perpendiculaire ($\phi = 90^\circ$) nous obtenons

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t} e^{-\xi y} \quad (3.45)$$

L'atténuation des champs dans le substrat est déterminée par la valeur réelle de ξ . Pour une zone adaptée nous avons

$$\xi = -\frac{i\omega}{c} \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0}\right) \quad (3.46)$$

où la partie réelle est

$$\Re(\xi) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 c} \quad (3.47)$$

En supposant que l'onde est réfléchi au bout de la zone absorbante, nous obtenons comme réflexion à incidence normale

$$\Gamma = e^{-2\frac{\sigma}{\epsilon_0 c}\delta} \quad (3.48)$$

où δ est l'épaisseur de la zone absorbante.

Si la condition Eqn. 3.42 est satisfaite, la conductivité σ peut être choisie aussi grande que l'on veut pour obtenir une réflexion Γ arbitrairement petite pour une épaisseur petite quelconque. En pratique, un σ très grand donne des réflexions numériques. Pour que σ ne devienne pas trop grand, on choisit une épaisseur de la zone d'absorption de plusieurs mailles. En plus, des expériences ont montré qu'une variation de σ aide à réduire la réflexion numérique. Une loi de variation avec un index n par exemple est donnée par

$$\sigma(\rho) = \sigma_m \left(\frac{\rho}{\delta} \right)^n \quad (3.49)$$

La réflexion alors est donnée par

$$\begin{aligned} \Gamma &= \exp \left\{ -\frac{2}{\epsilon_0 c} \int_0^\delta \sigma(x) dx \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2}{n+1} \frac{\sigma_m \delta}{\epsilon_0 c} \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.3 Expérimentation numérique des conditions aux limites

Une fois qu'une approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle est écrite sous forme d'une équation à dérivées partielles, elle doit être discrétisée afin d'obtenir une condition aux limites discrètes. Le schéma d'extrapolation qui en résulte peut être utilisé afin d'estimer les impulsions entrant aux noeuds limites de la grille de calcul. Les composantes des champs en modélisation TLM sont des superpositions linéaires des impulsions entrant dans un noeud [Joh87]; cela est équivalent à l'extrapolation des 6 composantes du champ électromagnétique.

Dans ce qui suit nous allons décrire des discrétisations de la formulation selon Lindmann et selon Higdon-Keys et nous exposons nos résultats obtenus par expérimentation numérique des schémas aux limites correspondants.

3.3.1 Tests de la formulation de Lindmann et extrapolation espace-temps dans le cas 2D

Nous avons montré dans la section précédente que la condition aux limites selon Lindmann (Eqs. 3.18, 3.19) est une formulation alternative à la formulation hiérarchique symétrique. Elle peut être approchée pour le SCN par le schéma à différences finies

$$\begin{aligned}
c\partial_x &\longrightarrow D_+^x((1-a)I + aZ^2) \\
\partial_t &\longrightarrow D_+^t((1-b)I + bK) \\
c^2\partial_y^2 &\longrightarrow D_+^y D_-^y \\
\partial_t^2 &\longrightarrow D_+^t D_-^t
\end{aligned} \tag{3.51}$$

où I , K et Z sont des opérateurs de décalage définis par

$$\begin{aligned}
I u_{0j}^n &= u_{0j}^n \\
K u_{0j}^n &= u_{1j}^n \\
Z u_{0j}^n &= u_{0j}^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

et D_\pm sont des opérateurs de différence avant/ arrière de premier ordre pour des valeurs aux bornes u_{0j}^{n+1} . Ils sont définis par

$$\begin{aligned}
D_+^x &= K^{-1} - I \\
D_-^x &= I - K \\
D_+^t &= Z^2 - I \\
D_-^t &= I - Z^{-2}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Ici l'utilisation de $Z^{\pm 2}$ au lieu de $Z^{\pm 1}$ respecte la propriété de propagation lente du SCN. Les coefficients a and b sont des coefficients de moyennage espace et temps et sont fixés à $a = b = 0.5$. Cette détermination particulière est connue sous le nom de *box-scheme method*. La condition aux limites résultante est explicite et donnée par

$$u_{0j}^{n+1} = u_{1j}^{n-1} + \frac{1-p_0}{1+p_0}(u_{1j}^{n+1} - u_{0j}^{n-1}) - \frac{p_0}{1+p_0} \sum_{m=1}^M (v_m)_{0j}^{n-1} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
(v_m)_{0j}^{n-1} &= 2(v_m)_{0j}^{n-3} - (v_m)_{0j}^{n-5} \\
&+ \beta_m ((v_m)_{0j+1}^{n-3} - 2(v_m)_{0j}^{n-3} + (v_m)_{0j-1}^{n-3}) \\
&+ \alpha_m (u_{0j+1}^{n-1} - 2u_{0j}^{n-1} + u_{0j-1}^{n-1} - u_{0j+1}^{n-3} - 2u_{0j}^{n-3} + u_{0j-1}^{n-3} \\
&+ u_{1j+1}^{n-1} - 2u_{1j}^{n-1} + u_{1j-1}^{n-1} - u_{1j+1}^{n-3} - 2u_{1j}^{n-3} + u_{1j-1}^{n-3}) ;
\end{aligned} \tag{3.55}$$

avec $m = 1 \dots M$.

L'évaluation des fonctions de Lindmann selon les Eqs. 3.54 et 3.55 demande la connaissance des impulsions aux noeuds voisins dans la direction y et pour cela ne peut pas être appliquée aux noeuds qui se trouvent dans les coins du domaine de calcul. Pour ces

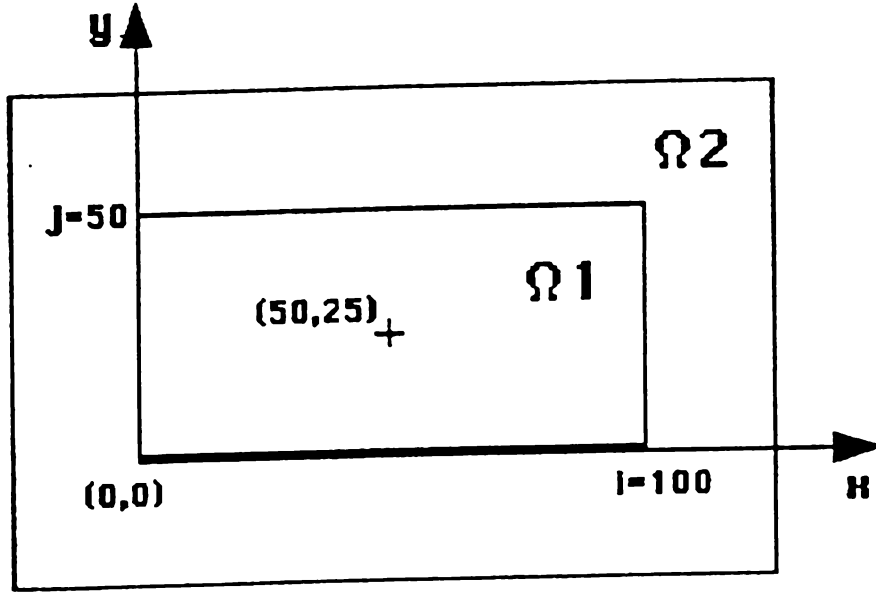


Figure 3.5: Grille de calcul et grille de calcul de référence pour les tests en 2D.

noeuds particuliers nous utilisons un simple schéma d'extrapolation comparable au schéma d'extrapolation espace-temps de premier ordre (Eqn. 3.1).

Nous avons testé le schéma d'extrapolation des Eqs. 3.54 et 3.55 en estimant les impulsions réfléchies aux limites d'une grille 2D de taille $100\Delta\ell \times 50\Delta\ell$ ($\Delta\ell$ étant l'espacement dans la grille), simulant l'espace libre. La grille 2D est constituée de noeuds condensés symétriques de Johns; Suivant la troisième dimension de l'espace nous avons appliqué des conditions périodiques afin de restreindre le flux d'énergie en 2D. Pour permettre la comparaison, nous avons également testé la "charge adaptée" et les conditions d'extrapolation d'espace-temps de premier et deuxième ordre.

Nous avons excité la grille au centre en utilisant une impulsion douce (voir Figure 3.6) définie sur un support compact par

$$u_{50\ 25}'' = \begin{cases} \tilde{\alpha}(10 - 15\cos\omega_1\zeta + 6\cos\omega_2\zeta - \cos\omega_3\zeta) & \zeta \leq \tau \\ 0 & \zeta > \tau \end{cases} \quad (3.56)$$

avec $\tilde{\alpha} = 1/320$, $\tau = 40\Delta t$, $\zeta = n\Delta t$ et $\omega_m = 2\pi m/\tau$, $m = 1, 2, 3$ [Bla88] [Moo88].

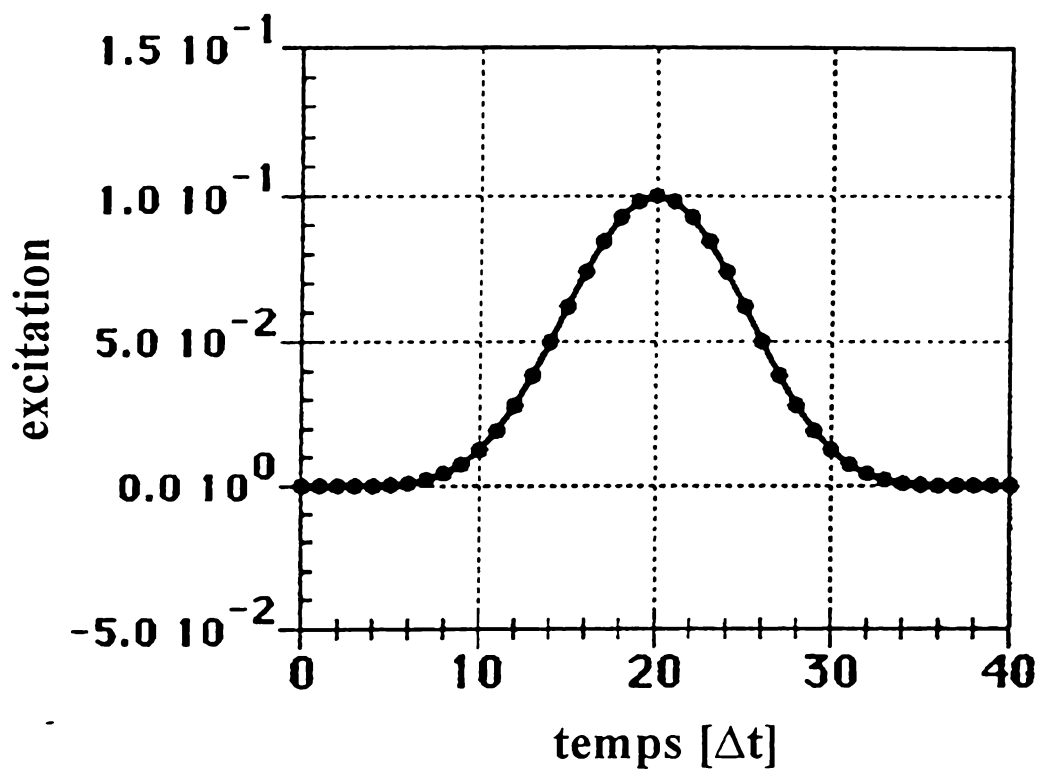


Figure 3.6: *Impulsion douce sur support compact (unités arbitraires).*

Nous avons calculé la réflexion aux limites de la composante du champ E_z , évaluée à la première ligne des noeuds proches de la frontière. La partie réfléchie pure a été obtenue en soustrayant aux valeurs des champs obtenus, la valeur dans le domaine de référence. Le domaine de référence a été choisi large afin que les impulsions calculées réfléchies à leurs limites n'aient pas le temps de revenir (voir Figure 3.5). La distance entre les limites du domaine de calcul et les limites du domaine de calcul de référence est 25 mailles.

Des résultats numériques sont montrés dans les Figs. 3.7 à 3.10: La figure 3.7 montre les réflexions dans le cas de conditions d'extrapolation espace-temps. La réflexion est normalisée par rapport au maximum de la fonction d'onde, obtenu proche de la frontière au pas d'itération 100. Pour le premier ordre d'extrapolation espace-temps nous avons obtenu une réflexion de 5% (valeur maximale); Pour le deuxième ordre d'extrapolation espace-temps nous avons obtenu une réflexion de 1 % (valeur maximale).

Dans la Figure 3.8 nous comparons l'effet de l'augmentation de l'ordre dans l'approximation de l'équation unidirectionnelle avec des coefficients de Padé: La réflexion peut être réduite jusqu'à 0.025 % en utilisant une approximation d'ordre (4, 4).

Dans la Figure 3.9 nous comparons l'effet de l'augmentation de l'ordre d'approximation de l'équation unidirectionnelle avec les coefficients interpolés aux points de Chebyshev. La réflexion peut toujours être réduite par augmentation de l'ordre d'approximation. Nous avons observé cette réduction de la réflexion pour tous les familles d'approximation.

La figure 3.10 compare 6 différentes familles d'approximation: Nous concluons que la réflexion moindre est obtenue en utilisant les coefficients de Padé.

Pour tous les schémas d'équation unidirectionnelle, nous avons observé la création de modes parasites: La Fig 3.11 montre la section droite de la fonction d'onde au pas de temps 1000: A ce pas, toutes les ondes créées par l'excitation initiale sont supposées avoir quitté la grille. La fonction d'onde résiduelle qui apparait sur la figure est due à l'excitation ponctuelle initiale de la grille. Dans le cas des schémas d'équation d'onde unidirectionnelle, cette fonction a été décalée dans l'espace. Une telle création de solutions non-physiques à l'excitation initiale est appelé instabilité [Aze68, page 28].

3.3.2 Tests de la formulation de Lindmann et de l'extrapolation espace-temps dans le cas 3D

La formulation de Lindmann du problème d'approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle en 2D est donnée par les Eqs. 3.18, 3.19 et peut simplement être généralisée en 3D: Le sinus de l'angle incident Θ est alors donné par

$$s = \frac{c}{\omega} \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = \sin \Theta \quad (3.57)$$

où k_y et k_z désignent les composantes du vecteur d'onde parallèles à la frontière. On introduit l'Eqn. 3.57 dans la relation de dispersion pour une onde plane en 3D

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (3.58)$$

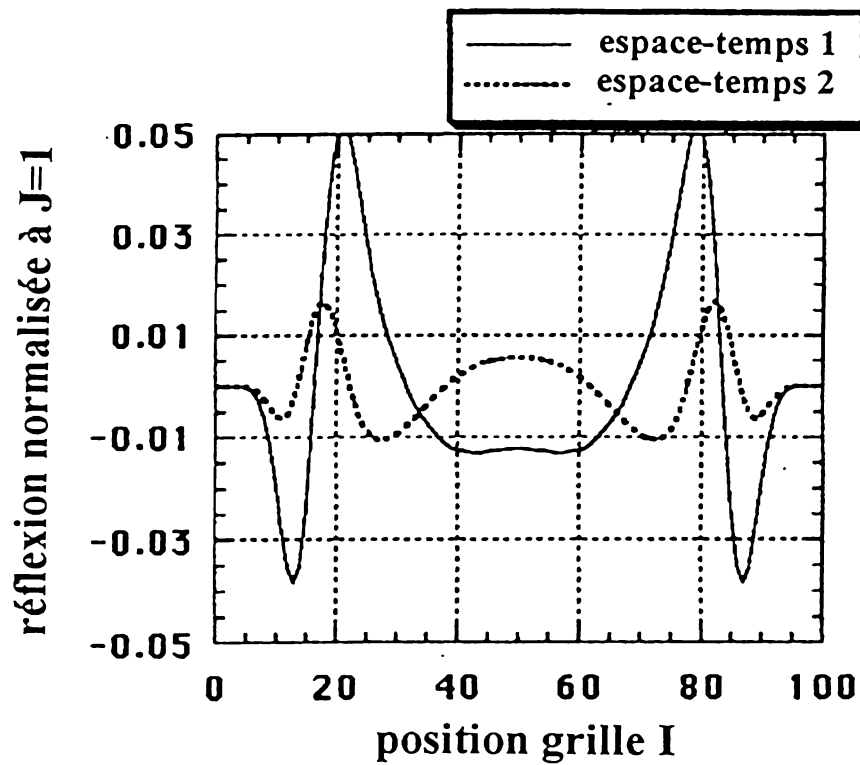


Figure 3.7: Réflexion locale avec une extrapolation espace-temps de premier et deuxième ordre.

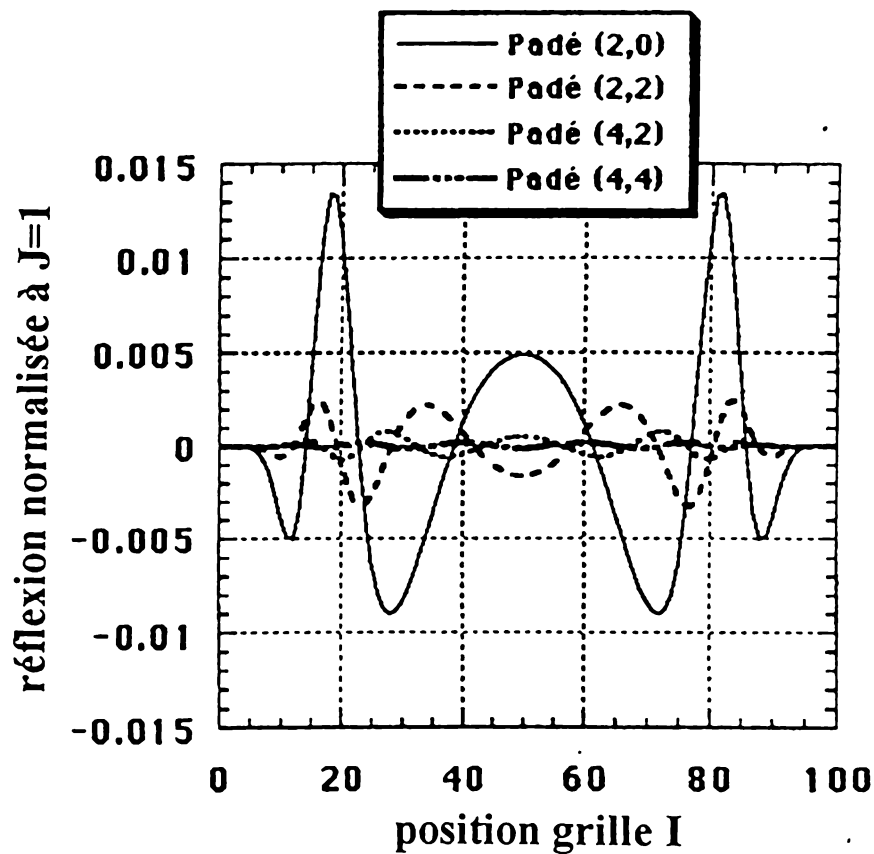


Figure 3.8: Réflexion locale en cas d'augmentation de l'ordre d'approximation de l'équation unidirectionnelle avec des coefficients de Padé.

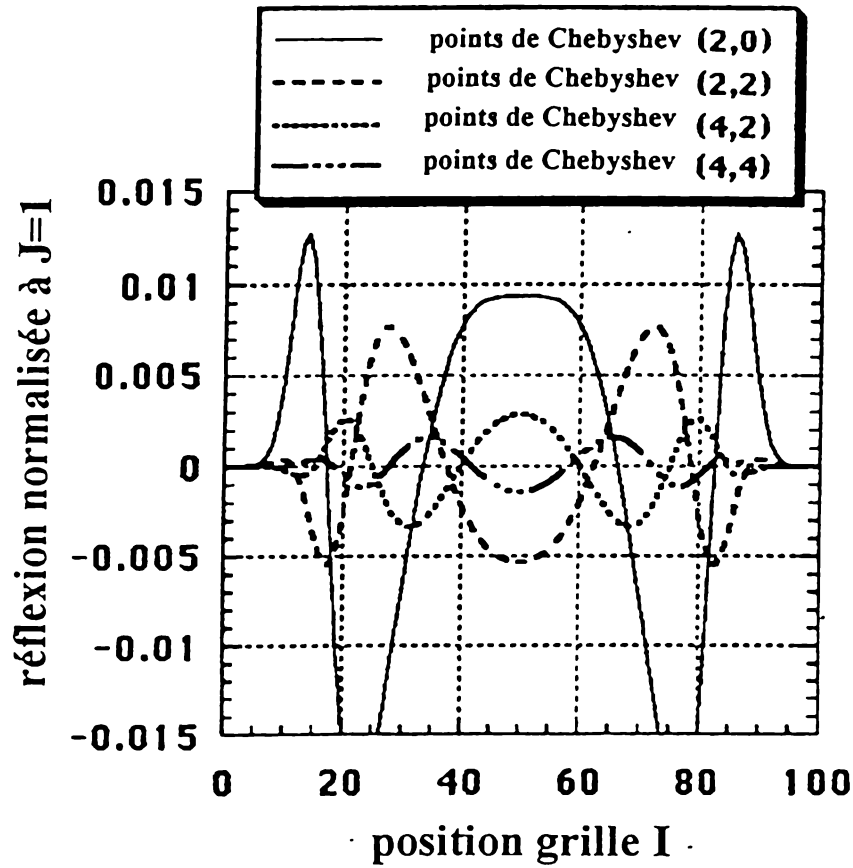


Figure 3.9: Réflexion locale en cas d'ordre croissant d'approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle avec des coefficients d'interpolation sur les points de Chebyshev.

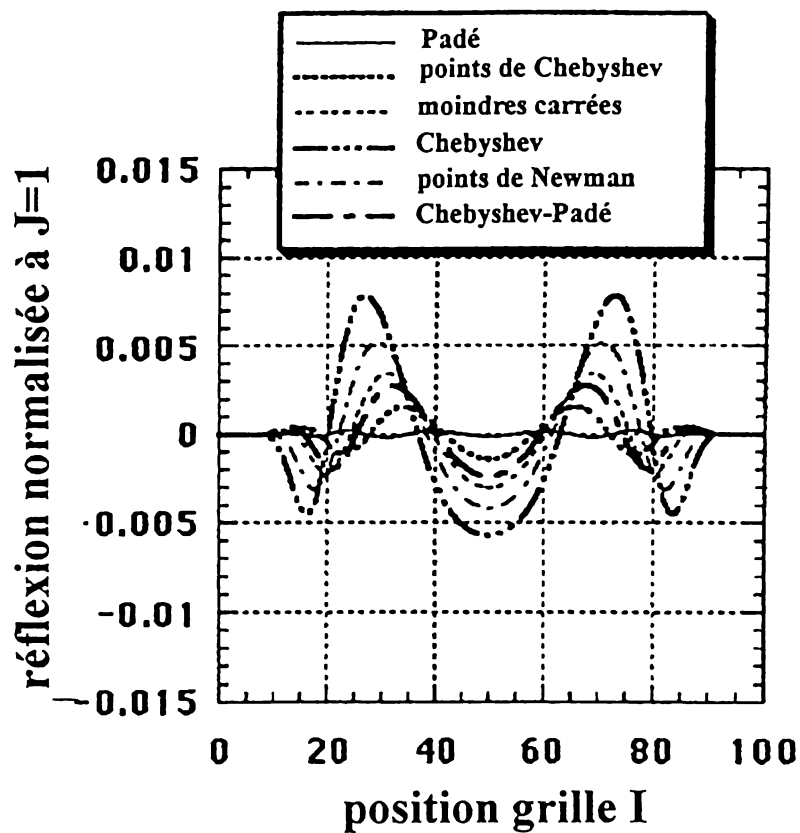


Figure 3.10: *réflexion locale en cas de l'ordre (4,4) approximation à l'équation d'onde unidirectionnelle pour 6 familles d'approximation.*

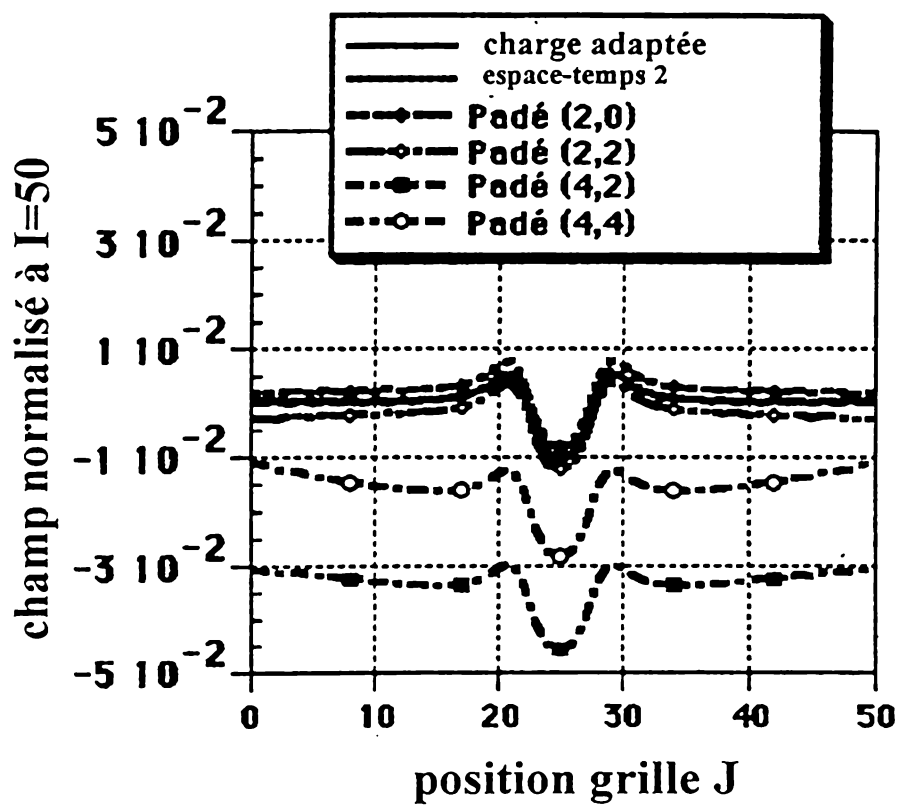


Figure 3.11: *Fonction d'onde normalisée à la position $i = 50$ au pas d'itération 1000.*

et les fonctions de Lindmann de l'Eqn. 3.14 donnent la formulation de Lindmann en 3D:

$$\partial_x u - \frac{p_0}{c} \partial_t u = \frac{p_0}{c} \sum_{m=1}^M v_m \quad (3.59)$$

où les fonction de Lindmann peuvent être déterminées en résolvant l'équation

$$\partial_t^2 v_m - \beta_m c^2 (\partial_y^2 + \partial_z^2) v_m = c^2 \alpha_m \partial_t (\partial_y^2 + \partial_z^2) u \quad (3.60)$$

Les coefficients α_m and β_m prennent les mêmes valeurs que dans la formulation 2D.

La discrétisation des Eqs. 3.59, 3.60 par analogie avec l'Eqn. 3.51 donne un schéma fortement instable. Nous avons vérifié que cette instabilité vient de l'Eqn. 3.60 seule en remplaçant le membre droit de cette équation par une fonction harmonique (correspondant à une onde harmonique incidente sous un angle fixe).

L'instabilité forte peut être évitée par une méthode de séparation pour la fonction d'onde et des fonctions de Lindmann de la forme

$$\begin{aligned} u &= u^{(y)} + u^{(z)} \\ v_m &= v_m^{(y)} + v_m^{(z)} \end{aligned}$$

où les fonctions avec l'exposant (y) dépendent de la variable y seulement et les fonctions avec exposant (z) dépendent de la variable z seulement.

Cette méthode de séparation nous permet de résoudre l'Eqn. 3.60 de façon approximative en résolvant

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v_m^y - \beta_m c^2 \partial_y^2 v_m^y &= c^2 \alpha_m \partial_t \partial_y^2 u \\ \partial_t^2 v_m^z - \beta_m c^2 \partial_z^2 v_m^z &= c^2 \alpha_m \partial_t \partial_z^2 u \end{aligned} \quad (3.61)$$

On remarque que, en faisant comme cela, nous résolvons exactement l'Eqn. 3.60 uniquement pour des ondes dont le vecteur d'onde \mathbf{k} est dans le plan (x-y) ou dans le plan (x-z). Ainsi dans le cas général d'une onde incidente sous un angle arbitraire à la frontière nous ne nous attendons pas à avoir la même absorption que pour un ordre donné dans les calculs 2D.

Nous avons testé le schéma d'extrapolation des Eqs. 3.59, 3.61 discretisé par l'Eqn. 3.51 numériquement; Pour cela, nous avons déterminé le "return-loss" défini comme $-10 \log \|\rho\|$, où ρ est le coefficient de réflexion évalué pour la composante du vecteur de Pointing P_z proche d'une limite absorbante terminant un guide rectangulaire pour des fréquences de 0 à 150 GHz.

Nous avons excité le guide en appliquant l'impulsion douce de l'Eqn. 3.56 en un plan d'excitation, constitué de tous les noeuds d'une section droite du guide et à une distance de 30 mailles de la frontière. Tous les noeuds ont été excités avec la même amplitude d'excitation. Comme cela nous n'avons pas seulement excités le mode fondamental TE_{10} mais un ensemble

des modes supérieurs. Nous ne nous attendons alors pas à trouver les mêmes résultats que Eswarappa [Esw94], parce que notre excitation est plus général. Comme en 2D, un calcul de référence nous a permis de séparer le signal total obtenu de la structure de test

$$S_{(\cdot)} = S_{(1)} + \rho S_{(2)}$$

avec le coefficient de réflexion ρ . Les signaux $S_{(1)}$ et $S_{(2)}$ sont les signaux de référence obtenus dans les plans 1 et 2 de la structure de référence (voir Figure 3.12).

Nous avons calculé les signaux $S_{(1)}$, $S_{(1)}$ et $S_{(2)}$ en intégrant la partie réelle de la composante du vecteur de Pointing P_z dans le domaine fréquentiel sur la section droite du guide et sur 150 itérations: Le spectre du signal $S_{(1)}$ dans le cas idéal devrait être la transformée de Fourier de la fonction d'excitation filtrée par le filtre passe-haut du guide (première fréquence de coupure du guide $f_{10} \approx 21$ GHz) et le filtre passe-bas de la grille (coupure de la grille ou fréquence de Nyquist $f_N \approx 1200$ GHz). Derrière la source (à gauche du guide) nous utilisons la charge adaptée. Le nombre d'itérations était limité à 150 pour que le signal de la sortie 1 du guide d'onde de référence ne contienne aucune partie de réflexion de la coté gauche du guide (voir Fig. 3.12) avant la fin de la simulation.

Nous limitons le régime d'intérêt à $f \leq 1/10 f_N$, ce qui est la condition d'usage pour permettre aux effets de dispersion de la méthode TLM d'être négligés [Hoe85]. Le spectre du signal $S_{(1)}$ est montré sur la figure 3.13: L'excitation de la grille était bonne pour nos calculs.

Pour les noeuds aux coins nous avons appliqué un simple schéma d'extrapolation comparable à l'extrapolation espace temps de premier ordre de l'Eqn. 3.1.

Des résultats numériques sont montrés dans les Figs. 3.14 à 3.17: Premièrement, pour permettre la comparaison, la figure 3.14 montre le "return-loss" dans le cas d'une charge adaptée et d'extrapolation espace-temps. Comme dans les expériences 2D, l'absorption la plus mauvaise est obtenue en utilisant la charge adaptée. Le return-loss dans ce cas varie entre 16 et 30 dB. Cela correspond à une réflexion dont la puissance est inférieure à 1% (valeur moyenne). L'extrapolation espace-temps de premier ordre est légèrement meilleure (return-loss entre 20 et 30 dB). Pour le deuxième ordre d'extrapolation espace temps nous avons obtenu un return-loss de 10 dB supérieur au premier ordre. La puissance réfléchie pour cela est inférieure à 0.1% dans le domaine spectral d'intérêt (valeur moyenne).

Dans la Figure 3.15 nous comparons l'effet de l'augmentation de l'ordre d'approximation en utilisant les coefficients de Padé: La réflexion n'est plus réduite de façon continue en augmentant l'ordre d'approximation. Comme on peut le voir clairement à l'ordre (4,4) d'approximation, des modes parasites sont présents (le return-loss devient négatif pour certaines fréquences) et donnent des perturbations dans l'estimation de la fonction d'onde aux limites. Le return-loss ne dépasse pas le return-loss de l'ordre deux d'extrapolation espace-temps sauf pour un petit domaine d'intérêt (90-100 GHz, 120-130 GHz).

Dans la figure 3.16 nous comparons l'effet de l'augmentation de l'ordre en utilisant les coefficients d'interpolation aux points de Chebyshev: Des modes parasites apparaissent comme dans le cas des coefficients de Padé (le return-loss devient négatif pour certaines fréquences) et perturbent l'estimation de la fonction d'onde aux limites.

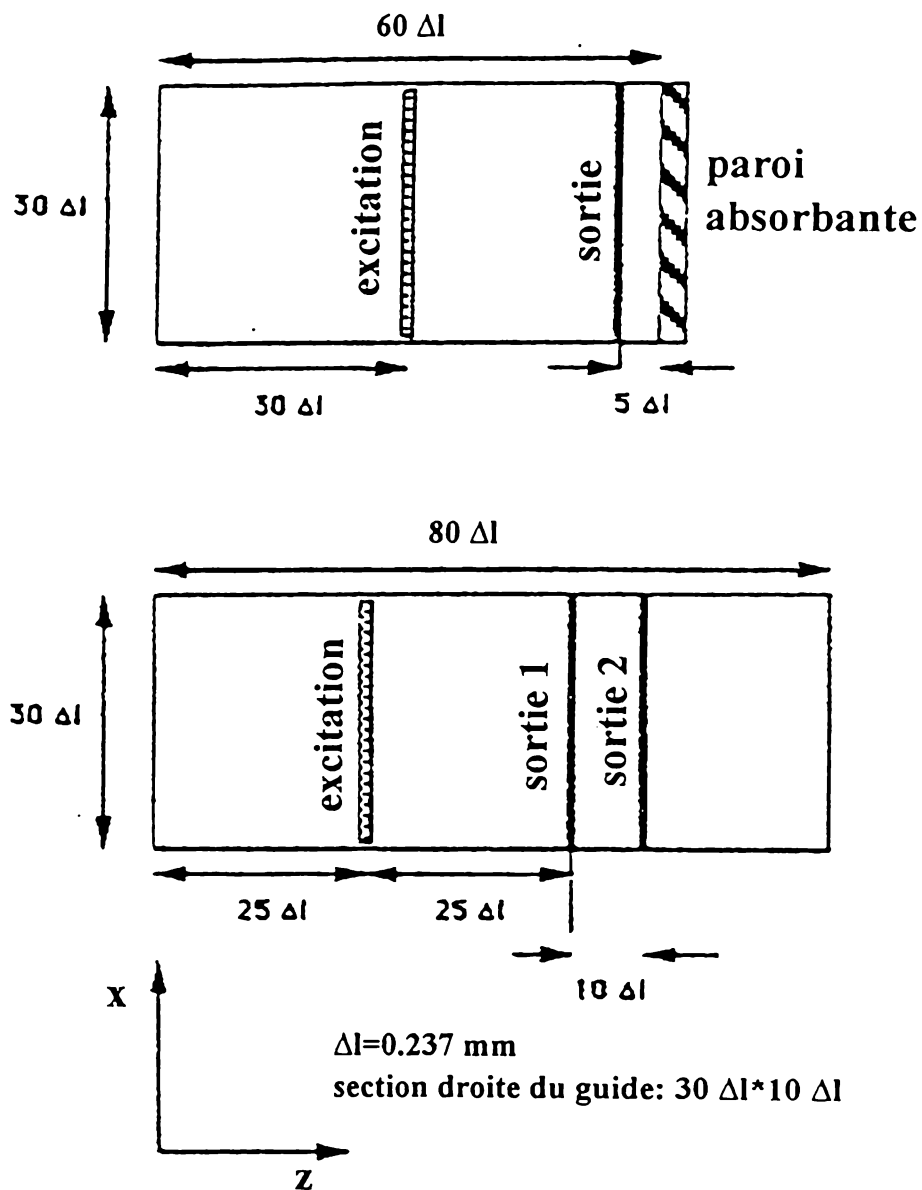


Figure 3.12: Structure de test en 3D: Guide d'onde terminé par des limites absorbantes (en haut) et guide d'onde de référence (en bas).

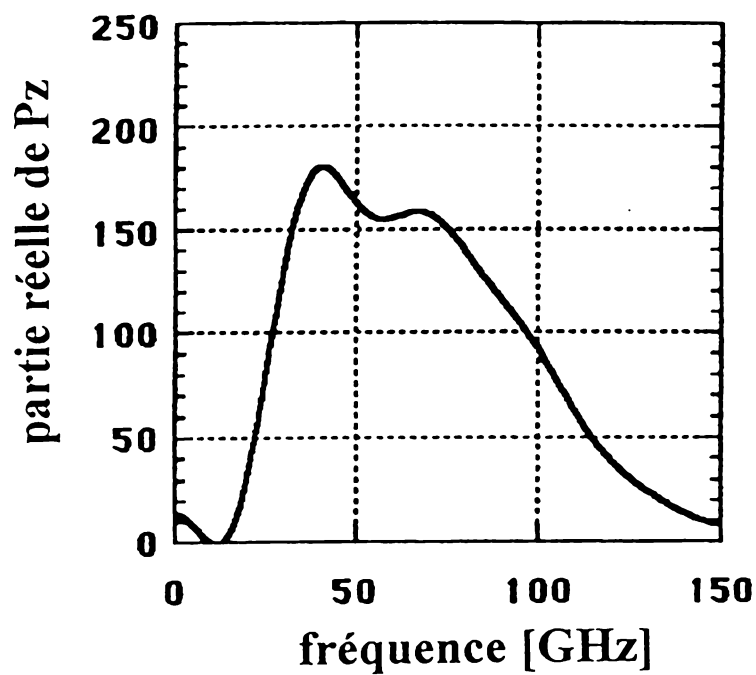


Figure 3.13: Spectre de la composante du vecteur de Poynting P_z (partie réelle) en passant le plan de référence 1.

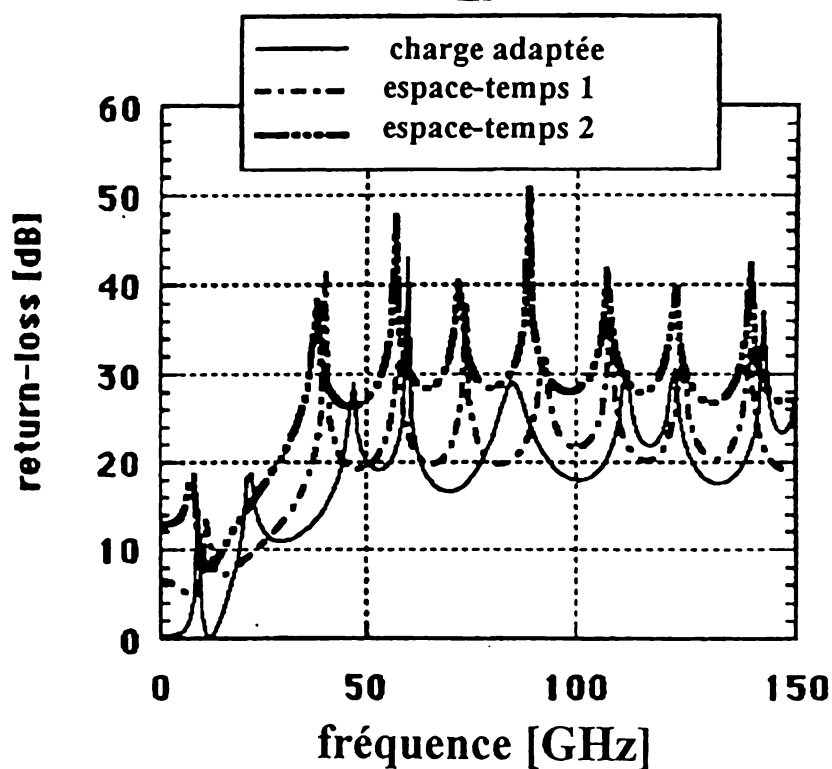


Figure 3.14: *Return-loss* dans le cas de premier et deuxième ordre extrapolation espace-temps et charge adaptée en 3D.

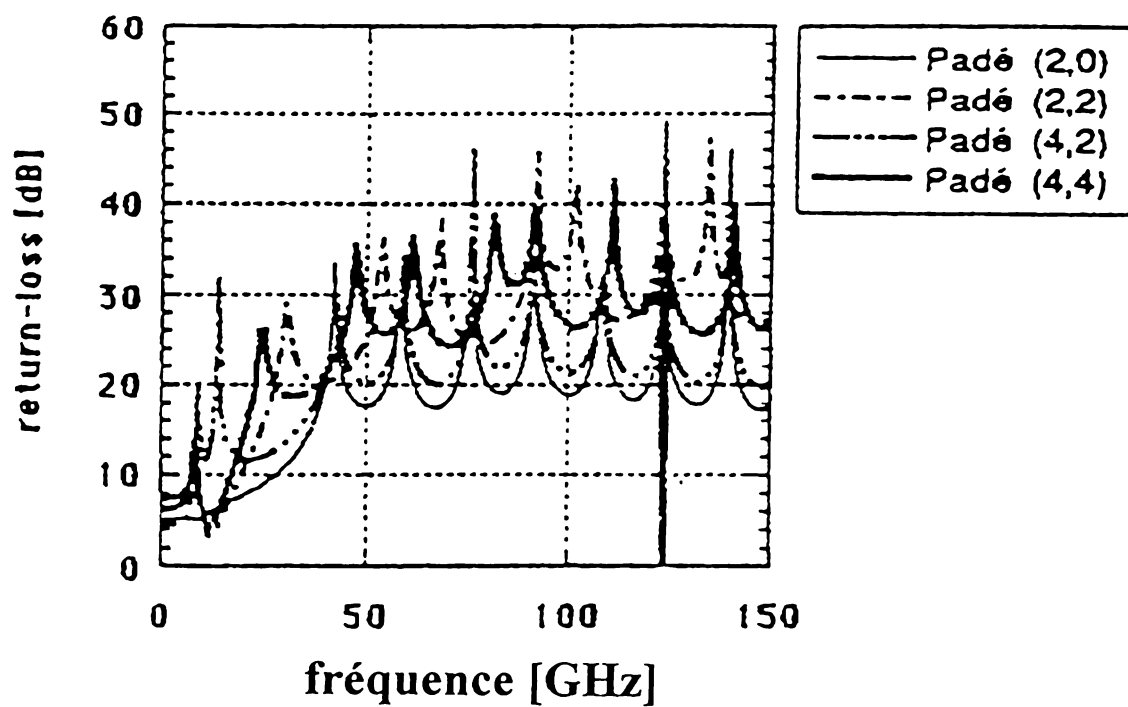


Figure 3.15: *Return-loss dans le cas d'ordre d'approximation croissant de l'équation unidirectionnelle avec les coefficients de Padé.*

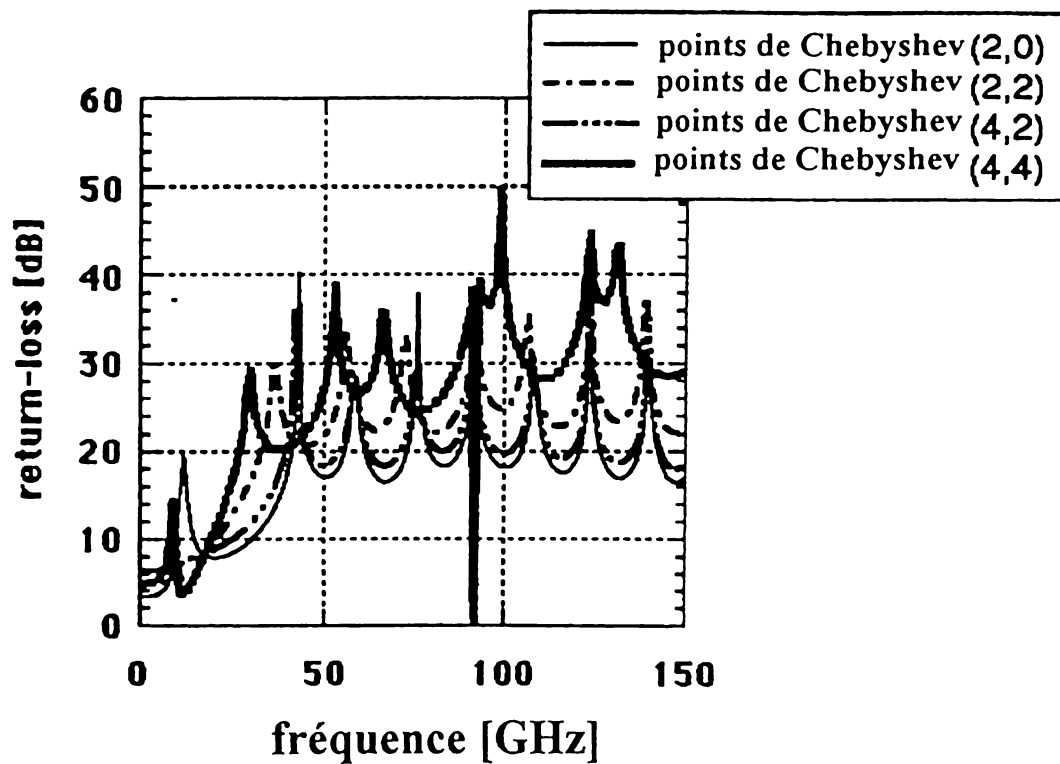


Figure 3.16: *Return-loss dans le cas d'ordre d'approximation croissant de l'équation d'onde unidirectionnelle avec coefficients d'interpolation sur les points de Chebyshev.*

La figure 3.17 compare les 7 différentes familles d'approximation: Aucune famille ne dépasse de façon significative la qualité d'absorption obtenue avec l'extrapolation espace-temps de deuxième ordre (qui est beaucoup plus simple) sur le domaine spectral total. En plus, tous les schémas introduisent de l'instabilité numérique. Cela peut être vu plus clairement par la valeur du return-loss devenant négative pour des fréquences particulières.

Nous résumons nos résultats comme suit: Pour tous les schémas d'équation d'onde unidirectionnelle nous observons la création de modes parasites. D'autre part, le premier et le deuxième ordre d'extrapolation testés pour la comparaison semblent être stables et donnent des absorptions meilleures que la charge adaptée conventionnelle.

La méthode de séparation introduit une approximation supplémentaire non-désirée en résolvant les conditions aux limites sous forme de Lindmann. On pourrait se demander si une discrétisation plus générale des Eqs. 3.18, 3.19 pourrait donner un schéma plus stable sans faire une approximation supplémentaire. Suivant les idées de Eswarappa et al. [Esw94] nous avons établi une méthode de discrétisation plus générale définie comme suit:

$$\begin{aligned}
 c\partial_x &\longrightarrow D_+^x((1-a)I + aZ^{-1}) \\
 \partial_t &\longrightarrow \mu(D_+^t + \epsilon)((1-b)I + bK^{+1}) \\
 c^2\partial_y^2 &\longrightarrow D_+^y D_-^y((1-\bar{a})I + \bar{a}Z^{-1})^2 \\
 \partial_t^2 &\longrightarrow \mu^2(D_+^t + \epsilon)(D_-^t + \epsilon)((1-\bar{b})I + \bar{b}K^{+1})^2
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

où I , K et Z sont des opérateurs de décalage définis par l'Eqn. 3.52 et $\mu = c\Delta t/\Delta x$ est le nombre de stabilité. Les ϵ sont des constantes d'amortissement. Leur introduction est motivée par le fait que $(\partial_t - \partial_x + \epsilon)u = 0$ possède des solutions qui décroissent exponentiellement selon $\exp\{-\epsilon t\}\bar{u}$ (\bar{u} est une solution de $(\partial_t - \partial_x)\bar{u} = 0$): L'introduction de ϵ est vue comme l'addition d'une décroissance exponentielle de la solution à l'origine. Ce terme rend le schéma d'extrapolation stable.

La discrétisation des Eqs. 3.18 et 3.19 au moyen de l'Eqn. 3.62 donne un schéma à différences explicite. De la propriété de la propagation lente du SCN, il découle que $\mu = 1/2$. Afin de respecter la caractéristique de propagation du SCN nous avons remplacé Z^{-1} dans l'Eqn. 3.62 par Z^{-2} . Il en résulte alors $\mu = 1$. Le schéma d'extrapolation obtenu par cette méthode de discrétisation a été trouvé fortement instable.

Pour des raisons de stabilité, une valeur typique utilisée dans les différences finies pour le nombre de stabilité est $\mu = 1/2$. Afin de respecter $\mu = 1/2$ ainsi que la caractéristique de propagation du SCN, nous avons remplacé dans l'Eqn. 3.62 les deux K^{+1} et Z^{-1} par K^{+2} et Z^{-2} . Le schéma d'extrapolation obtenu par cette méthode de discrétisation est alors explicite et donné par

$$\begin{aligned}
 u_{0jk}^{n+1} &= [(1-a) + p_0\mu(1-b)(1+\epsilon)]^{-1} \\
 &\times \left[((1-a) - p_0\mu b(1+\epsilon)) u_{2jk}^{n+1} \right.
 \end{aligned}$$

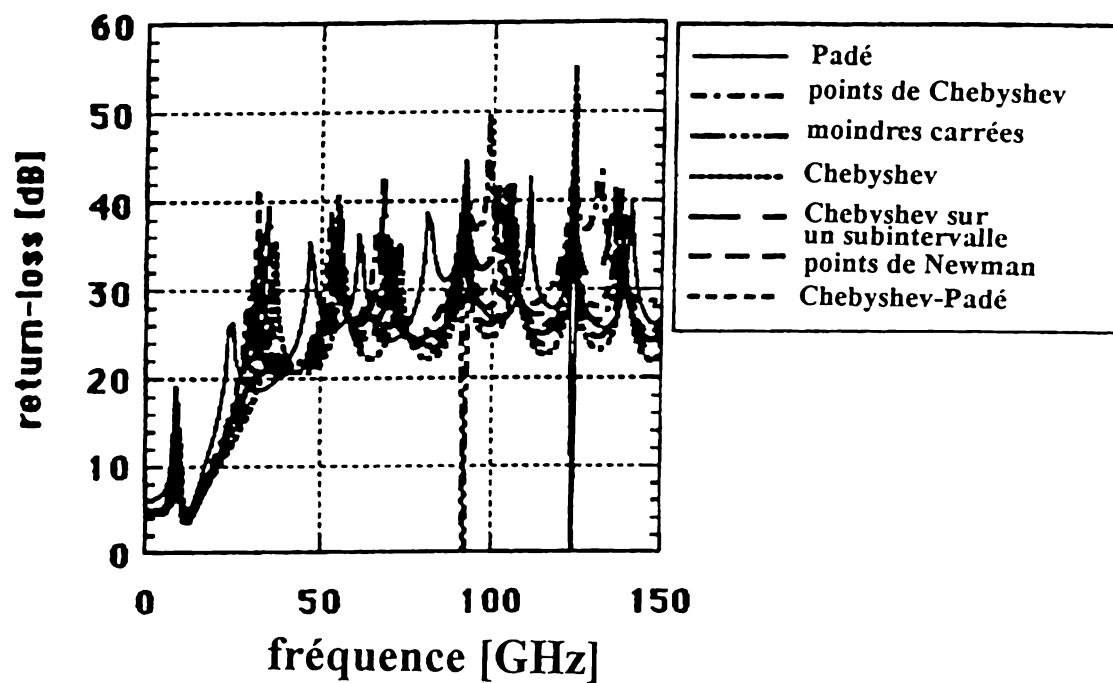


Figure 3.17: *Return-loss dans le cas d'ordre d'approximation (4,4) de l'équation unidirectionnelle pour les 7 familles d'approximation.*

$$\begin{aligned}
& + (p_0 \mu (1 - b) - a) u_{0jk}^{n-1} \\
& + (a + p_0 \mu b) u_{2jk}^{n-1} - p_0 \sum_{m=1}^M (v_m)_{0jk}^{n-1} \Big] \quad (3.63)
\end{aligned}$$

où les fonctions discrètes de Lindmann doivent être évaluées comme suit

$$\begin{aligned}
(v_m)_{0jk}^{n-1} &= \left(\mu^2 (1 - \bar{b})^2 (1 + \epsilon) \right)^{-1} \\
&\times \left(-\mu^2 \left[\left((1 - \bar{b})^2 (-2 + \epsilon^2) + 2\bar{b}(1 - \bar{b})(1 + \epsilon) \right) (v_m)_{0jk}^{n-3} \right. \right. \\
&\quad + \left((1 - \bar{b})^2 (1 - \epsilon) + 2\bar{b}(1 - \bar{b})(-2 + \epsilon^2) + \bar{b}^2 (1 + \epsilon) \right) (v_m)_{0jk}^{n-5} \\
&\quad + \left(2\bar{b}(1 - \bar{b})(1 - \epsilon) + \bar{b}^2 (-2 + \epsilon^2) \right) (v_m)_{0jk}^{n-7} \\
&\quad \left. \left. - \left(\bar{b}^2 (1 + \epsilon) \right) (v_m)_{0jk}^{n-9} \right] \right. \\
&\quad + \mu \alpha_m \left((1 - b) \left\{ (1 + \epsilon) \left[\right. \right. \right. \\
&\quad (1 - \bar{a})^2 \left(u_{0j+2k}^{n-3} - 2u_{0jk}^{n-3} + u_{0j-2k}^{n-3} + u_{0jk+2}^{n-3} - 2u_{0jk}^{n-3} + u_{0jk-2}^{n-3} \right) \\
&\quad + 2\bar{a}(1 - \bar{a}) \left(u_{0j+2k}^{n-5} - 2u_{0jk}^{n-5} + u_{0j-2k}^{n-5} + u_{0jk+2}^{n-5} - 2u_{0jk}^{n-5} + u_{0jk-2}^{n-5} \right) \\
&\quad + \bar{a}^2 \left(u_{0j+2k}^{n-7} - 2u_{0jk}^{n-7} + u_{0j-2k}^{n-7} + u_{0jk+2}^{n-7} - 2u_{0jk}^{n-7} + u_{0jk-2}^{n-7} \right) \Big] \\
&\quad \left. \left. - \left[\right. \right. \right. \\
&\quad (1 - \bar{a})^2 \left(u_{0j+2k}^{n-5} - 2u_{0jk}^{n-5} + u_{0j-2k}^{n-5} + u_{0jk+2}^{n-5} - 2u_{0jk}^{n-5} + u_{0jk-2}^{n-5} \right) \\
&\quad + 2\bar{a}(1 - \bar{a}) \left(u_{0j+2k}^{n-7} - 2u_{0jk}^{n-7} + u_{0j-2k}^{n-7} + u_{0jk+2}^{n-7} - 2u_{0jk}^{n-7} + u_{0jk-2}^{n-7} \right) \\
&\quad + \bar{a}^2 \left(u_{0j+2k}^{n-9} - 2u_{0jk}^{n-9} + u_{0j-2k}^{n-9} + u_{0jk+2}^{n-9} - 2u_{0jk}^{n-9} + u_{0jk-2}^{n-9} \right) \Big] \Big\} \\
&\quad \left. + b \left\{ (1 + \epsilon) \left[\right. \right. \right. \\
&\quad (1 - \bar{a})^2 \left(u_{2j+2k}^{n-3} - 2u_{2jk}^{n-3} + u_{2j-2k}^{n-3} + u_{2jk+2}^{n-3} - 2u_{2jk}^{n-3} + u_{2jk-2}^{n-3} \right) \\
&\quad + 2\bar{a}(1 - \bar{a}) \left(u_{2j+2k}^{n-5} - 2u_{2jk}^{n-5} + u_{2j-2k}^{n-5} + u_{2jk+2}^{n-5} - 2u_{2jk}^{n-5} + u_{2jk-2}^{n-5} \right) \\
&\quad + \bar{a}^2 \left(u_{2j+2k}^{n-7} - 2u_{2jk}^{n-7} + u_{2j-2k}^{n-7} + u_{2jk+2}^{n-7} - 2u_{2jk}^{n-7} + u_{2jk-2}^{n-7} \right) \Big] \\
&\quad \left. \left. - \left[\right. \right. \right. \\
&\quad (1 - \bar{a})^2 \left(u_{2j+2k}^{n-5} - 2u_{2jk}^{n-5} + u_{2j-2k}^{n-5} + u_{2jk+2}^{n-5} - 2u_{2jk}^{n-5} + u_{2jk-2}^{n-5} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\tilde{a}(1 - \tilde{a}) \left(u_{2j+2k}^{n-7} - 2u_{2jk}^{n-7} + u_{2j-2k}^{n-7} + u_{2jk+2}^{n-7} - 2u_{2jk}^{n-7} + u_{2jk-2}^{n-7} \right) \\
& + \tilde{a}^2 \left(u_{2j+2k}^{n-9} - 2u_{2jk}^{n-9} + u_{2j-2k}^{n-9} - u_{2jk+2}^{n-9} - 2u_{2jk}^{n-9} + u_{2jk-2}^{n-9} \right) \Bigg\} \\
& + \beta_m \Bigg[\\
& (1 - \tilde{a})^2 \left((v_m)_{0j+2k}^{n-3} - 2(v_m)_{0jk}^{n-3} + (v_m)_{0j-2k}^{n-3} \right. \\
& \quad \left. + (v_m)_{0jk+2}^{n-3} - 2(v_m)_{0jk}^{n-3} + (v_m)_{0jk-2}^{n-3} \right) \\
& + 2\tilde{a}(1 - \tilde{a})^2 \left((v_m)_{0j+2k}^{n-5} - 2(v_m)_{0jk}^{n-5} + (v_m)_{0j-2k}^{n-5} \right. \\
& \quad \left. + (v_m)_{0jk+2}^{n-5} - 2(v_m)_{0jk}^{n-5} + (v_m)_{0jk-2}^{n-5} \right) \\
& + \tilde{a} \left((v_m)_{0j+2k}^{n-7} - 2(v_m)_{0jk}^{n-7} + (v_m)_{0j-2k}^{n-7} \right. \\
& \quad \left. + (v_m)_{0jk+2}^{n-7} - 2(v_m)_{0jk}^{n-7} + (v_m)_{0jk-2}^{n-7} \right) \Bigg] \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Ce schéma a également été trouvé fortement instable. Les valeurs testées pour les coefficients de moyennage en espace-temps $(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$, $(\epsilon = 0)$, sont $(0.5, 0.5, 0.0, 0.0)$, $(0.25, 0.25, 0.0, 0.0)$ et $(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$. Nous avons vérifié qu'il n'est pas possible d'enlever l'instabilité pour d'autres valeurs de ϵ . Dans tous les cas, la divergence est apparue tout de suite après que les impulsions soient arrivées aux limites.

Notre expérimentation numérique des schémas d'extrapolation présentés ci-dessus ne nous donnait pas beaucoup d'espoir de trouver une méthode explicite proprement absorbante, dérivée de la formulation de Lindmann du problème d'approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle.

3.3.3 Tests de la formulation de Higdon-Keys en 3D

Il a été montré dans la Section 3.2.4 que la formulation de Higdon-Keys est équivalente au cas particulier de la formulation de Lindmann symétrique avec un nombre maximal d'angles d'absorption. D'autre part, une discrétisation de la formulation de Higdon-Keys donne des schémas d'extrapolation complètement différents de ceux dérivés de la discrétisation de la formulation de Lindmann. Premièrement, dans la formulation de Higdon-Keys il n'y a pas de fonctions de correction qui obéissent à une fonction d'onde en 2D guidée à évaluer (on rappelle que c'est l'équation à dérivées partielles déterminant ces fonctions de correction qui provoque la divergence numérique). Deuxièmement, et contrairement à la formulation de Lindmann, la formulation de Higdon-Keys demande toujours l'évaluation de dérivées partielles d'ordre élevé pour une approximation d'ordre élevé.

Afin de construire un schéma d'extrapolation nous écrivons la condition de Higdon-Keys en introduisant des constantes d'amortissement ϵ_i (voir page 117):

$$\prod_{i=1}^{n+1} (c \partial_x - g_i \partial_t - c \epsilon_i) u = 0 \quad (3.65)$$

où Θ_i , $i = 1 \dots n+1$ sont les angles d'absorption totale, $g_i = \cos \Theta_i$ sont des poids et $n+1$ est l'ordre de la condition absorbante aux limites. Nous obtenons de l'équation 3.65 un schéma d'extrapolation en introduisant les approximations aux différences finis suivantes:

$$\begin{aligned} c \partial_x &\longrightarrow D_-^x ((1-a)I + aZ^{-2}) \\ \partial_t &\longrightarrow D_-^t ((1-b)I + bK) \end{aligned} \quad (3.66)$$

où I , K et Z sont des opérateurs de décalage définis par l'Eqn. 3.52 et D_- sont des opérateurs définis par l'Eqn. 3.53. Les paramètres a et b sont des paramètres de moyennage espace et temps. Dans les cas spéciaux $n = 1$ et $n = 2$ l'Eqn. 3.65 se réduit avec $a = b = 0$ aux extrapolations espace-temps de premier et deuxième ordre. Dans le cas général, nous pouvons écrire le schéma d'extrapolation résultant dans la forme

$$\prod_{i=1}^{n+1} B_i u_0^{n+1} = 0 \quad (3.67)$$

avec les opérateurs B_i donnés par

$$B_i = I - \alpha_i Z^{-2} - \beta_i K^{-1} - \gamma_i K^{-1} Z^{-2}$$

avec des coefficients d'extrapolation donnés par

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{a - (1-b)g_i}{a - 1 - (1-b)g_i - \epsilon_i} \\ \beta_i &= \frac{a - 1 + b g_i}{a - 1 - (1-b)g_i - \epsilon_i} \\ \gamma_i &= \frac{-a - b g_i}{a - 1 - (1-b)g_i - \epsilon_i} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Le schéma d'extrapolation de l'Eqn. 3.67 peut être évalué à chaque point limite de la grille y compris les points d'angle; Un traitement spécial des coins comme pour la formulation de Lindmann n'est pas nécessaire.

Comme cela a déjà été observé par Eswarappa et al., nous avons trouvé que de mettre les paramètres de moyennage espace et temps à $a = b = 0.5$ (méthode "box-scheme") donne un schéma instable. Dans les calculs décrits ci-dessous nous avons pris $a = b = 0.25$.

Le schéma de l'Eqn. 3.67 peut être implanté plus simplement de façon récursive, comme cela a été proposé par Fang et al. [Fan90]. Pour un ordre d'approximation $n+1$ donné le schéma est alors donné par

$$\begin{aligned}
B_1 u_k^{n+1} &= (h_1)_k^{n+1} \\
B_2 (h_1)_k^{n+1} &= (h_2)_k^{n+1} \\
B_3 (h_2)_k^{n+1} &= (h_3)_k^{n+1} \\
&\vdots \\
B_n (h_{n-1})_k^{n+1} &= (h_n)_k^{n+1} \\
B_{n+1} (h_n)_k^{n+1} &= 0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Nous apellons h_i la fonction de correction numéro i de l'opérateur B_i .

On note que, contrairement à la formulation de Lindmann, l'ordre des dérivées partielles évaluées ici n'est pas limité; Les fonctions de correction sont calculées elles-mêmes par des dérivées des fonctions de correction. Nous évaluons la fonction de correction h_n à $x = 0$ et $t = (n+1)\Delta t$ correspondant à la dernière des équations 3.69 comme suit:

$$(h_n)_0^{n+1} = \alpha_{n+1} (h_n)_0^{n-1} + \beta_{n+1} (h_n)_1^{n+1} + \gamma_{n+1} (h_n)_1^{n-1}$$

Pour cela, nous avons besoin les valeurs $(h_n)_0^{n-1}$, $(h_n)_1^{n+1}$ et $(h_n)_1^{n-1}$ de la fonction de correction h_n . Nous notons que nous ne devons pas évaluer les valeurs de $(h_n)_0^{n-1}$ et $(h_n)_1^{n-1}$ puisqu'elles sont connues de l'itération précédente (où elles étaient appelées $(h_n)_0^{n+1}$ et $(h_n)_1^{n+1}$). La valeur de $(h_n)_0^{n+1}$ peut être obtenue d'après l'avant-dernière des équations 3.69 comme suit:

$$\begin{aligned}
(h_n)_1^{n+1} &= (h_{n-1})_1^{n+1} - \alpha_n (h_{n-1})_1^{n-1} - \beta_n (h_{n-1})_2^{n+1} \\
&\quad - \gamma_n (h_{n-1})_2^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

où $\{k, l\} = \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}$.

L'algorithme correspondant pour l'ordre $n+1$ est donné ci-dessous: Pour chaque itération nous calculons les fonctions de correction pour $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
(h_1)_k^{n+1} &= u_k^{n+1} - \alpha_1 u_k^{n-1} - \beta_1 u_{k+1}^{n+1} - \gamma_1 u_{k+1}^{n-1} \\
&\quad \text{pour } k = 1 \dots n \\
(h_2)_k^{n+1-2l} &= (h_1)_k^{n+1} - \alpha_2 (h_1)_k^{n-1} - \beta_2 (h_1)_{k+1}^{n+1} - \gamma_2 (h_1)_{k+1}^{n-1} \\
&\quad \text{pour } k = 1 \dots n-1 \\
(h_3)_k^{n+1-2l} &= (h_2)_k^{n+1} - \alpha_3 (h_2)_k^{n-1} - \beta_3 (h_2)_{k+1}^{n+1} - \gamma_3 (h_2)_{k+1}^{n-1} \\
&\quad \text{pour } k = 1 \dots n-2 \\
&\vdots \\
(h_n)_k^{n+1-2l} &= (h_{n-1})_k^{n+1} - \alpha_n (h_{n-1})_k^{n-1} - \beta_n (h_{n-1})_{k+1}^{n+1} \\
&\quad - \gamma_n (h_{n-1})_{k+1}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_n (h_{n-1})_{k+1}^{n-1} \\
& \text{pour } k = 1
\end{aligned}
\tag{3.71}$$

Nous évaluons ensuite les fonctions:

$$\begin{aligned}
(h_n)_0^{n+1} &= \alpha_{n+1} (h_n)_0^{n-1} + \beta_{n+1} (h_n)_1^{n+1} + \gamma_{n+1} (h_n)_1^{n-1} \\
(h_{n-1})_0^{n+1} &= \alpha_n (h_{n-1})_0^{n-1} + \beta_n (h_{n-1})_1^{n+1} + \gamma_n (h_{n-1})_1^{n-1} + (h_n)_0^{n+1} \\
(h_{n-2})_0^{n+1} &= \alpha_{n-1} (h_{n-2})_0^{n-1} + \beta_{n-1} (h_{n-2})_1^{n+1} + \gamma_{n-1} (h_{n-2})_1^{n-1} + (h_{n-1})_0^{n+1} \\
\\
(h_1)_0^{n+1} &= \alpha_2 (h_1)_0^{n-1} + \beta_2 (h_1)_1^{n+1} + \gamma_2 (h_1)_1^{n-1} + (h_2)_0^{n+1} \\
u_0^{n+1} &= \alpha_1 u_0^{n-1} + \beta_1 u_1^{n+1} + \gamma_1 u_1^{n-1} + (h_1)_0^{n+1}
\end{aligned}
\tag{3.72}$$

Pour une implantation numérique de l'ordre $n+1$ donné, des conditions aux limites de l'ordre $n'+1$; $n' < n$ peuvent être simulées en mettant toutes les fonctions de correction jusqu'à n' égales à zéro.

Les angles d'absorption totale Θ_i qui déterminent les coefficients d'extrapolation α_i , β_i et γ_i peuvent être distribués arbitrairement dans l'intervalle $[0^\circ \dots 90^\circ]$. Si les limites sont loin des régions d'excitation ou de dispersion, le front d'onde proche des limites peut être approché localement par une onde plane. Alors les angles d'absorption totale peuvent être mis égaux à l'angle d'incidence de l'onde touchant les limites. Cela donnerait une bonne absorption même avec une condition aux limites d'ordre faible. Puisque l'angle d'incidence et le poids correspondant

$$g_i = \cos \Theta_i = \sqrt{\frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \tag{3.73}$$

sont en général inconnus, on pourrait estimer les poids au moyen des dérivées en direction des axes de la grille, utilisant le schéma à différences finies:

$$\begin{aligned}
jk_x u = \partial_x u &\cong D_+^x ((1-a)I + Z^{-1}) u_{0jk}^n \\
jk_y u = \partial_y u &\cong \frac{1}{2} (D_+^y + D_-^y) ((1-a)I + Z^{-1}) u_{0jk}^n \\
jk_z u = \partial_z u &\cong \frac{1}{2} (D_+^z + D_-^z) ((1-a)I + Z^{-1}) u_{0jk}^n
\end{aligned}
\tag{3.74}$$

où les opérateurs I , Z , et D_\pm sont définis par les Eqs. 3.52, 3.53. Le paramètre de moyennage dans le temps a était fixé dans nos calculs à $a = 0.5$. En insérant l'Eqn. 3.74 dans l'Eqn. 3.73

on a un estimateur pour les poids inconnus de chaque point limite de la grille sauf pour les points dans les coins.

Des premiers calculs numériques en utilisant l'algorithme du schéma d'extrapolation des Eqs. 3.71-3.72 ont indiqué que des instabilités apparaissent pour l'ordre $n+1 \geq 3$. Les facteurs d'amortissement $\epsilon_i = 0.1$ ($\epsilon_i = 0.2$) retardent ces instabilités mais ne les enlèvent pas.

Nous avons testé l'implantation récursive de la condition de Higdon-Keys selon les Eqs. 3.71, 3.72 jusqu'à l'ordre 5 avec un guide d'onde rectangulaire terminé par des conditions absorbantes aux limites décrites dans la Section précédente (comp. page 110). Les résultats de nos calculs sont montrés sur les figures 3.18 à 3.21:

La figure 3.18 montre l'effet de l'augmentation de l'ordre pour la condition de Higdon-Keys sans amortissement ($\epsilon = 0$) et l'approximation de Padé. Le return-loss obtenu avec la condition de Higdon-Keys de premier ordre est similaire à celui obtenu avec la condition d'extrapolation espace-temps de premier ordre (on remarque que pour $a = b = 0.0$ les conditions seraient identiques). L'augmentation de l'ordre d'approximation entraîne une diminution du return-loss dans une large bande de fréquences. Nous concluons que le schéma aux limites des Eqs. 3.71, 3.72 pour $\epsilon = 0$ donne de mauvais résultats pour des approximations de l'équation d'onde unidirectionnelle d'ordres élevés.

Dans la figure 3.19 nous montrons l'effet de l'introduction des constantes d'amortissement afin de rendre le schéma aux limites des Eqs. 3.71, 3.72 stable. Le return-loss pour l'ordre 3 est légèrement amélioré autour de 100 GHz en augmentant ϵ . Le résultat reste loin d'être satisfaisant. Nous concluons que le schéma aux limites donne de mauvais résultats même après l'introduction des constantes d'amortissement ϵ .

La figure 3.20 montre le return-loss pour la condition de Higdon-Keys d'ordre 5 avec différentes distributions d'angles d'absorption totale et constantes d'amortissement: Ni la distribution d'angles d'absorption totale ni la distribution de constantes d'amortissement ne semblent avoir d'influence significative sur le return-loss. Le return-loss reste toujours comparable à celui obtenu avec la condition plus simple d'extrapolation espace-temps de premier ordre.

La figure 3.21 montre les résultats obtenus en utilisant l'estimation des angles: Le premier et deuxième ordre du schéma de Higdon avec estimation de l'angle est légèrement meilleur que le premier et deuxième schéma sans estimation de l'angle. Augmenter l'ordre d'approximation entraîne toujours la création de modes parasites, donnant une dégradation du return-loss sur une large bande spectrale.

Nous avons essayé de lisser les fluctuations rapides de l'estimateur du poids $\hat{g} = \cos \hat{\Theta}$ ($\hat{\Theta}$ étant l'angle estimé) en le remplaçant par un estimateur moyen du poids obtenu comme moyenne arithmétique des estimations pendant les 9 dernières itérations. Le lissage n'a guère d'effet sur le return-loss.

Nous concluons que l'estimation de l'angle n'est pas une méthode prometteuse pour obtenir de la condition de Higdon-Keys un schéma stable d'absorption satisfaisante des ondes.

Nous notons que nous avons trouvé qu'environ 50 % des poids estimés $\hat{g} = \cos \Theta$ sont dans l'intervalle $[\hat{g}^{(9)} - 0.1, \hat{g}^{(9)} + 0.1]$. Pour cette raison nous doutons que l'estimation

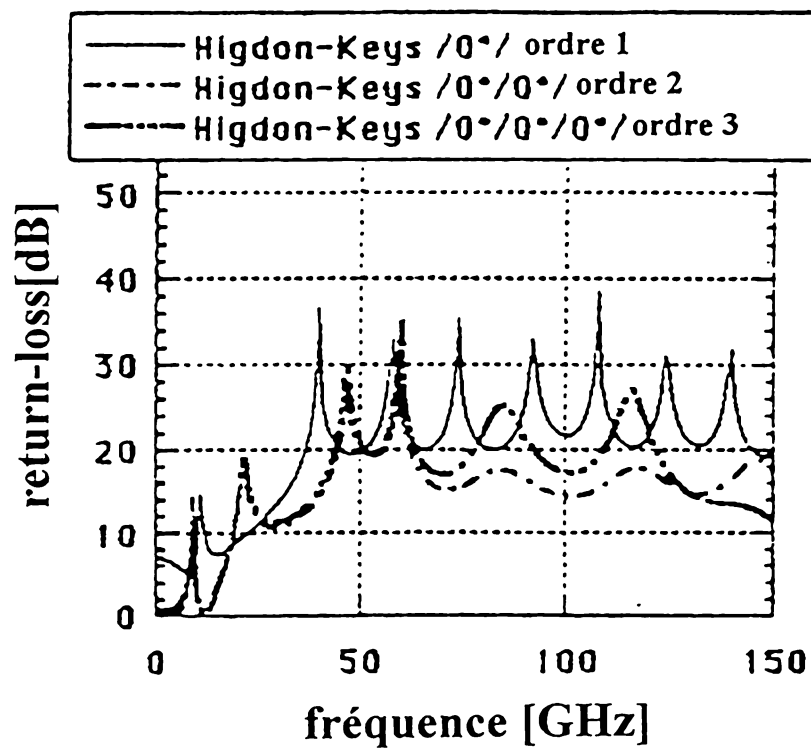


Figure 3.18: *Return-loss* pour la condition de Higdon-Keys pour des ordres croissants.

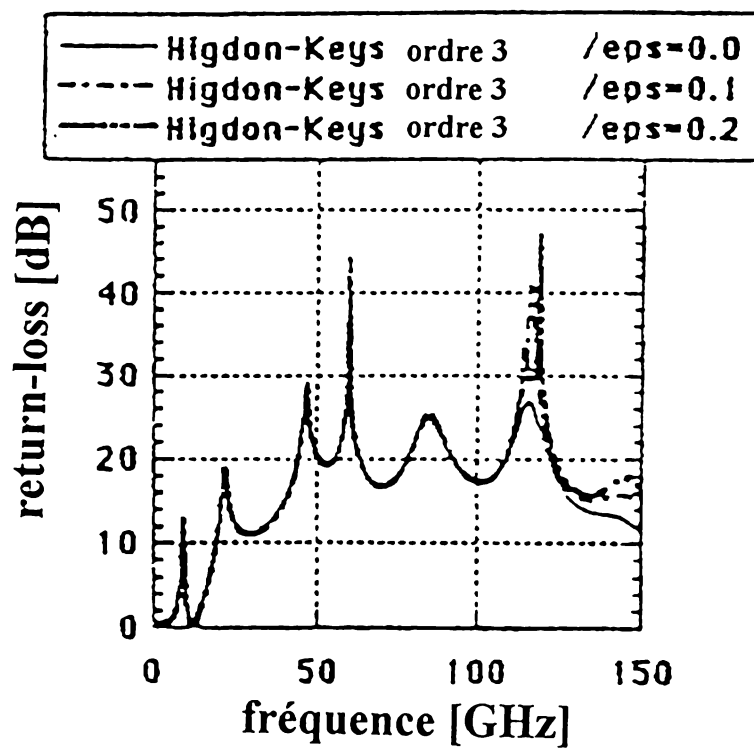


Figure 3.19: *Return-loss pour la condition de Higdon-Keys de troisième ordre avec des constantes d'amortissement croissantes.*

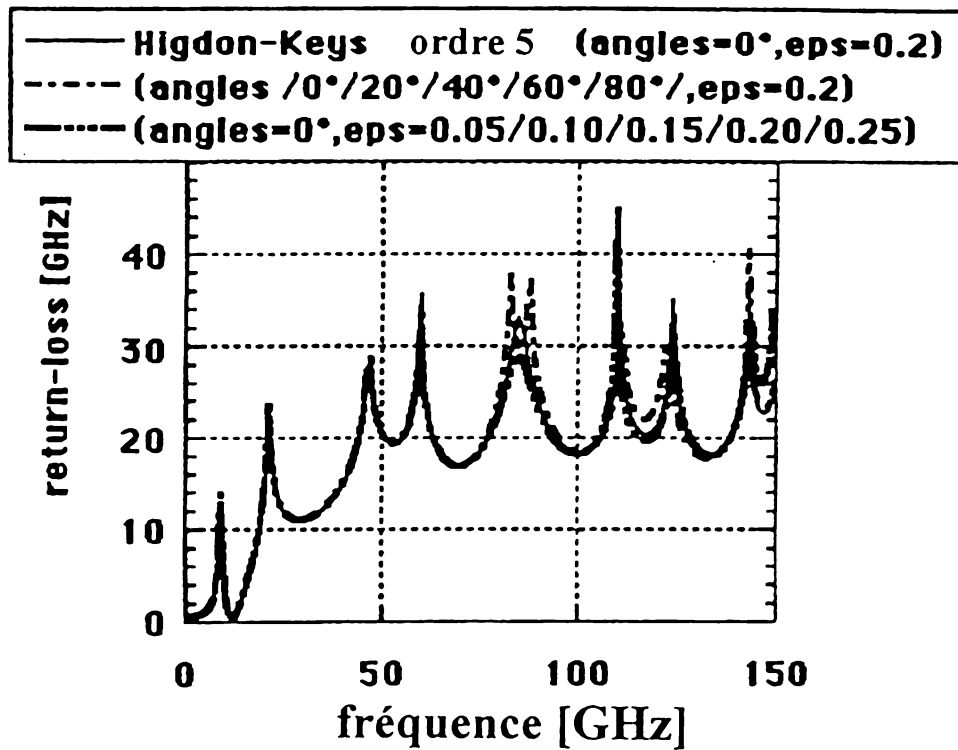


Figure 3.20: *Return-loss pour la condition de Higdon-Keys de l'ordre 5 avec constantes d'amortissement et diverses distributions des angles d'absorption totale.*

des angles en utilisant des dérivées partielles explicites de différences finies (voir Eqn. 3.74) puisse être utilisée en combinaison avec des schémas aux limites d'ordre faible afin de réduire les réflexions résiduelles.

3.3.4 Filtrage numérique pour des conditions d'extrapolation

Dans les Sections précédentes nous avons vu que l'efficacité des conditions d'extrapolation en 3 dimensions est limitée. Par opposition aux calculs en deux dimensions, l'absorption mesurée au moyen du return-loss — n'augmente pas avec l'ordre d'extrapolation. L'application des conditions d'extrapolation mène alors à la création de modes non-compatibles avec les conditions initiales. Ces *modes parasites* peuvent être supportés par la grille TLM du fait de l'échantillonnage spatiale. Ils limitent l'efficacité des conditions d'absorption.

Une technique de filtrage des modes parasites a été proposée par Chen et al. [Che93]. L'idée de Chen et al. est la suivante: Nous avons vu qu'une condition d'extrapolation peut toujours être écrite sous la forme (cf. par ex. Eqs. 3.69):

$$B(u_{0j}^n) = 0 \quad (3.75)$$

Nous admettons des modes à la fréquence Nyquist $f_N = 1/2\Delta t$ en écrivant

$$(1 + Z^{-2}K)B(u_{0j}^n) = 0 \quad (3.76)$$

c'est à dire que nous permettons des amplitudes ϵ tel que

$$\begin{aligned} B(u_{0j}^n) &= \epsilon \\ Z^{-2}KB(u_{0j}^n) = B(u_{1j}^{n-2}) &= -\epsilon \end{aligned} \quad (3.77)$$

La condition de l'Eqn. 3.76 permet des modes à la fréquence Nyquist. L'opérateur $(1 + Z^{-2}K)$ peut être interprété comme filtre numérique pour l'opérateur d'extrapolation B : Il limite l'effet de l'opérateur B aux modes d'une fréquence inférieure à la fréquence de Nyquist. On s'attend alors à ce qu'en appliquant la condition de l'Eqn. 3.76, les modes à la fréquence Nyquist ne seront pas renforcés ou, autrement dit, que les modes parasites créés par l'opérateur d'extrapolation sont annihilés.

La condition de l'Eqn. 3.76 suppose que les modes à la fréquence Nyquist se propagent dans la direction perpendiculaire aux limites du domaine de calcul. Une généralisation de l'opérateur $(1 + Z^{-2}K)$, qui tient compte de l'angle d'incidence ainsi que de l'ordre de l'approximation, a été proposée par Chen et al. : Soit l'opérateur d'extrapolation

$$B = \sum_{i,j=0}^N a_{ij} K^i Z^{-2j} \quad (3.78)$$

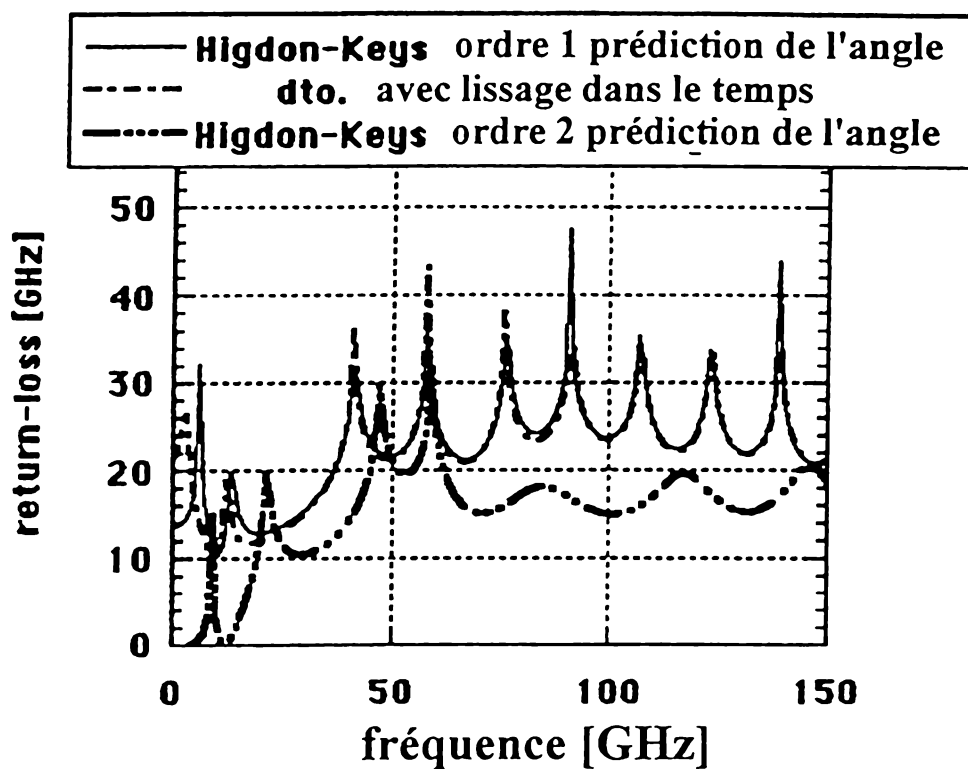


Figure 3.21: *Return-loss pour la condition de Higdon-Keys du premier et deuxième ordres avec estimation de l'angle.*

Alors une condition d'extrapolation avec annihilation des modes parasites (AMP) à la fréquence de Nyquist est donnée par

$$\left(\sum_{i,j=0}^N (-1)^i a_{ij} K^i Z^{-2j} \right) B(u_{0j}^n) = 0 \quad (3.79)$$

Pour les conditions d'extrapolation espace-temps de premier et deuxième ordres (Eqs. 3.1 et 3.2) on obtient alors avec un filtrage numérique selon l'Eqn. 3.79

$$u_{0jk}^{n+1} - u_{2jk}^{n-3} = 0 \quad \text{premier ordre} \quad (3.80)$$

$$u_{0jk}^{n+1} - 2u_{2jk}^{n-3} + u_{4jk}^{n-7} = 0 \quad \text{deuxième ordre} \quad (3.81)$$

Nous avons implanté ces conditions aux terminaisons du guide d'onde décrit dans la Section 3.3.2. Pour ce calcul nous avons utilisé comme excitation une gaussienne. Nous avons vérifié que le signal en puissance passant par la sortie 1 (cf. Fig. 3.12) était suffisamment grand jusqu'à 90 GHz. La figure 3.22 montre l'effet de l'opérateur d'annihilation des modes parasites à la fréquence de Nyquist pour le premier et le deuxième ordre d'extrapolation en espace-temps: Le return-loss ne change guère par rapport à l'application de la condition d'extrapolation espace-temps sans filtrage numérique. Le deuxième ordre donne une amélioration du return-loss par rapport au premier ordre et le premier ordre donne une amélioration du return-loss par rapport à la condition de charge adaptée. Le nombre d'itérations était de 150, i.e. relativement faible, de même que pour les calculs dans la Section 3.3.2.

Nous concluons à partir de la figure 3.22 qu'une annihilation des modes parasites au moyen d'un filtrage numérique selon l'Eqn. 3.79 n'apporte aucune amélioration de l'absorption des ondes. Cela indique que la plupart des modes parasites qui perturbent l'efficacité des conditions d'extrapolation se trouvent à une fréquence plus basse que la fréquence de Nyquist.

Chen et al. ont aussi publié des résultats obtenus sur le return-loss d'un guide d'ondes rectangulaire terminé par des schémas d'extrapolation avec filtrage numérique selon l'Eqn. 3.79. Ils ont calculé le return-loss directement à partir du taux d'ondes stationnaires évalué en mesurant l'amplitude minimale du champ et l'amplitude maximale du champ en fonction de la fréquence¹. Par contre, ils n'ont pas comparé leurs résultats aux résultats obtenus avec les mêmes schémas d'extrapolation sans filtrage numérique. Nos résultats indiquent que les résultats dans la précision obtenus par Chen et al. auraient été les mêmes s'ils avaient utilisé leurs schémas d'extrapolation sans filtrage numérique. Par contre, Chen a montré que la stabilité est meilleure avec la méthode de filtrage [Che92].

¹L'amplitude d'une onde partiellement stationnaire varie en fonction de la distance au saut d'impédance. L'amplitude minimale et l'amplitude maximale sont alors les valeurs minimales et maximales de l'amplitude de l'onde en fonction de la distance.

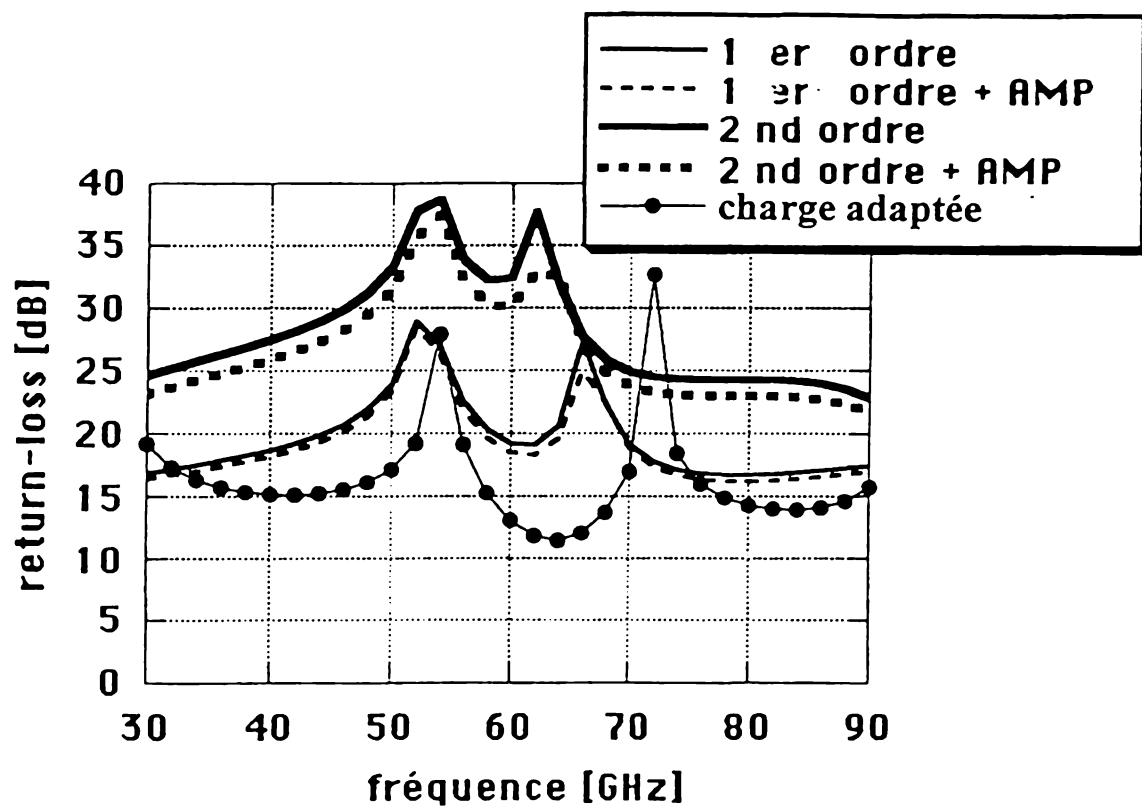


Figure 3.22: Effet de l'opérateur d'annihilation des modes parasites à la fréquence de Nyquist pour le premier et le deuxième ordre d'extrapolation espace-temps.

3.3.5 Application de la théorie des zones d'absorption pour le noeud condensé symétrique

Des zones d'absorption ont été testés en 2D pour une combinaison de la méthode des différences finies et de la méthode TLM par Eswarappa et al. [Esw95]. Les zones d'absorption ont été introduites dans la partie de la grille traitée par la méthode des différences finies. Le return-loss pour la condition de Bérenger (théorie des zones absorbantes) avec une zone d'absorption de 20 mailles a été trouvé supérieur à 50 dB et par contre le return-loss pour le deuxième ordre d'extrapolation basé sur l'équation unidirectionnelle a été de 25 dB. Cela nous a encouragé à essayer d'introduire des zones d'absorption pour le noeud condensé symétrique en 3D également.

Nous rappelons que la théorie des zones d'absorption nous dit que nous pouvons minimiser la réflexion d'une zone d'absorption de la façon suivante: Nous introduisons une conductivité magnétique σ^* (cf. Section 3.2.6). L'impédance du milieu absorbant Z' devient alors (cf. Eqn. 3.41)

$$Z' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{\frac{1 - j\sigma^*/\omega\mu}{1 - j\sigma/\omega\epsilon}} \quad (3.82)$$

Pour l'absorption d'une onde incidente perpendiculaire à la frontière entre un milieu d'impédance $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ et un milieu absorbant il faut que $Z' = Z$. Cela est réalisé dans le cas où

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma^*}{\mu} \quad (3.83)$$

L'onde va être affaiblie en pénétrant dans la région de conductivité σ où l'affaiblissement sera d'autant plus grand que la conductivité sera grande. En principe, σ peut être choisi quelconque pourvu que l'Eqn. 3.83 soit satisfaite. Une seule maille avec une conductivité assez forte serait donc capable d'absorber toute l'énergie incidente. En pratique, une forte variation de σ introduit des réflexions numériques. La zone d'absorption est alors choisie d'une largeur de plusieurs mailles où on établit une variation de σ le long d'un axe x perpendiculaire à la frontière selon

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{x}{\delta} \right)^n \quad (3.84)$$

où δ est la largeur de la zone absorbante et n est l'index de la variation: Pour $n = 0$, la variation est constante, pour $n = 1$ la variation est linéaire et pour $n = 2$ la variation est parabolique. La réflexion R est obtenue en introduisant l'Eqn. 3.84 dans l'Eqn. 3.48; On obtient alors

$$R = \exp - \frac{2}{n+1} \frac{\sigma_0 \delta}{\epsilon_0 c} \quad (3.85)$$

Pour une valeur de R , une largeur de zone absorbante δ et un index de variation n donné, l'Eqn. 3.85 détermine la valeur de σ_0 .

Nous avons introduit une conductivité magnétique σ^* dans la matrice du noeud condensé symétrique en introduisant un stub de conductance magnétique pour chacun de axes x , y et z . La valeur de la conductance est donnée par

$$G_{st}^* = \sigma^* Z_0 \Delta \ell \quad (3.86)$$

Les stubs ont été introduits dans la matrice de répartition par symétrie en changeant les éléments de l'Eqn. 2.87 comme suit

$$\begin{aligned} a &= -\frac{G+Y}{2(G+Y+4)} + \frac{G^*+Z}{2(G^*+Z+4)} \\ c &= -\frac{G+Y}{2(G+Y+4)} - \frac{G^*+Z}{2(G^*+Z+4)} \\ d=i &= \frac{4}{2(4+Z+G^*)} \\ j &= \frac{4+G^*-Z}{4+G^*+Z} \quad f = Zd \end{aligned} \quad (3.87)$$

Nous avons testé la méthode d'introduction d'une zone absorbante dans le calcul du guide d'onde rectangulaire terminé par des conditions absorbantes décrites dans la Section 3.3.2. Afin de pouvoir introduire une zone de 10 mailles nous avons multiplié les dimensions le long de l'axe principale x par un facteur 3. Nous avons également augmenté le nombre d'itérations d'un facteur 3, afin que le signal de la réflexion passe entièrement par le plan de sortie 1 (cf. Fig. 3.12).

Nous avons fait les calculs pour deux types de variations, linéaire et parabolique. Nous avons fait les mêmes calculs en introduisant la conductivité magnétique pour adapter une transition AIR-AIR ($Z = Z_{AIR}$, "matched layer" ou ML) et en utilisant seulement une conductivité électrique sans adaptation d'impédance, c'est à dire sans conductivité magnétique ("absorbing layer" ou AL). Nous avons fait les calculs pour trois valeurs de réflexion $R = 0.001$, $R = 0.01$ et $R = 0.1$. Ces valeurs pour la réflexion ont été calculées en utilisant l'Eqn. 3.85, et en supposant que le domaine de calcul était terminé par un mur électrique. Dans nos calculs, nous avons appliqué des conditions de charge adaptée aux limites; On s'attend alors à une réflexion encore plus faible que celle donnée par la valeur de R .

Dans nos calculs, nous avons trouvé que l'influence de la variation linéaire ou parabolique est négligeable. La figure 3.23 montre les résultats pour la variation parabolique: La variation de R reste essentiellement sans influence. Les résultats pour l'adaptation AIR-AIR correspondent au résultat avec charge adaptée sans zone d'absorption. Dans le cas de zones d'absorption sans adaptation d'impédance (sans conductivité magnétique), la réflexion est plus important qu'avec une charge adaptée sans zone d'absorption. L'adaptation AIR-AIR n'apporte alors aucune amélioration par rapport à la condition de charge adaptée.

Dans le cas sans adaptation d'impédance, le résultat n'est pas surprenant car on s'attend des réflexions due au changement de l'impédance. Dans le cas avec adaptation d'impédance, il

faut dire que les couches absorbantes demandent une incidence normale en général. Dans le guide l'incidence n'est pas normale proche de la fréquence de coupure. Pour cela, la couche absorbante donne des mauvaises résultats.

Nous avons alors fait des calculs en adaptant spécifiquement le mode principal de propagation TE_{10} dans le guide pour une fréquence donnée. L'impédance du mode TE_{10} est connue analytiquement; Elle est montrée en fonction de la fréquence dans la figure 3.24.

La conductivité magnétique σ^* est alors donnée en fonction de l'impédance d'onde Z dans le guide (mode TE_{10})

$$\frac{\sigma^*}{\sigma} = Z^2$$

La figure 3.25 montre l'effet de l'adaptation de l'impédance d'onde pour 3 fréquences: Le maximum de return-loss trouvé autour de 37 GHz ne change pas avec la fréquence d'adaptation. Nous ne constatons alors aucun effet de l'adaptation d'impédance sur l'efficacité de l'absorption de la zone absorbante.

Les essais avec la matrice du noeud condensé symétrique modifié afin de simuler une conductivité magnétique ne sont pas encourageants. Dans aucun cas, la condition la plus simple à appliquer, la charge adaptée, n'a pu être améliorée au moyen d'une zone absorbante.

Commentaire:

- Les unités utilisées dans la méthode TLM ne sont en général pas des unités SI. Il est plus pratique de normaliser l'impédance dans l'air comme $Z_{AIR} = 1$. En outre, nous mesurons la longueur en mm. Pour les unités nous avons donc

$$G_{st} = \sigma_{u. TLM} Z_0 [377\Omega] \Delta\ell [\text{mm}]$$

et alors

$$\sigma_{u. TLM} = \frac{377}{1000} \sigma_{u. SI}$$

3.3.6 Application des conditions d'extrapolation pour des calculs de lignes micro-rubans

Nous avons alors testé les conditions d'extrapolation afin de terminer le domaine de calcul dans le cas de la simulation d'une ligne micro-ruban. La question à poser est: Est-ce que l'application des conditions d'extrapolation peut améliorer les calculs d'évaluation des paramètres et de la distribution des champs des structures micro-ruban traitées dans le Chapitre 1 ?

Pour pouvoir répondre à cette question, nous avons appliqué les conditions d'extrapolation espace-temps au bout d'une ligne micro-ruban afin de terminer la partie AIR-(extérieur du domaine de calcul) et afin de terminer la partie AIR/diélectrique-(extérieur du domaine de

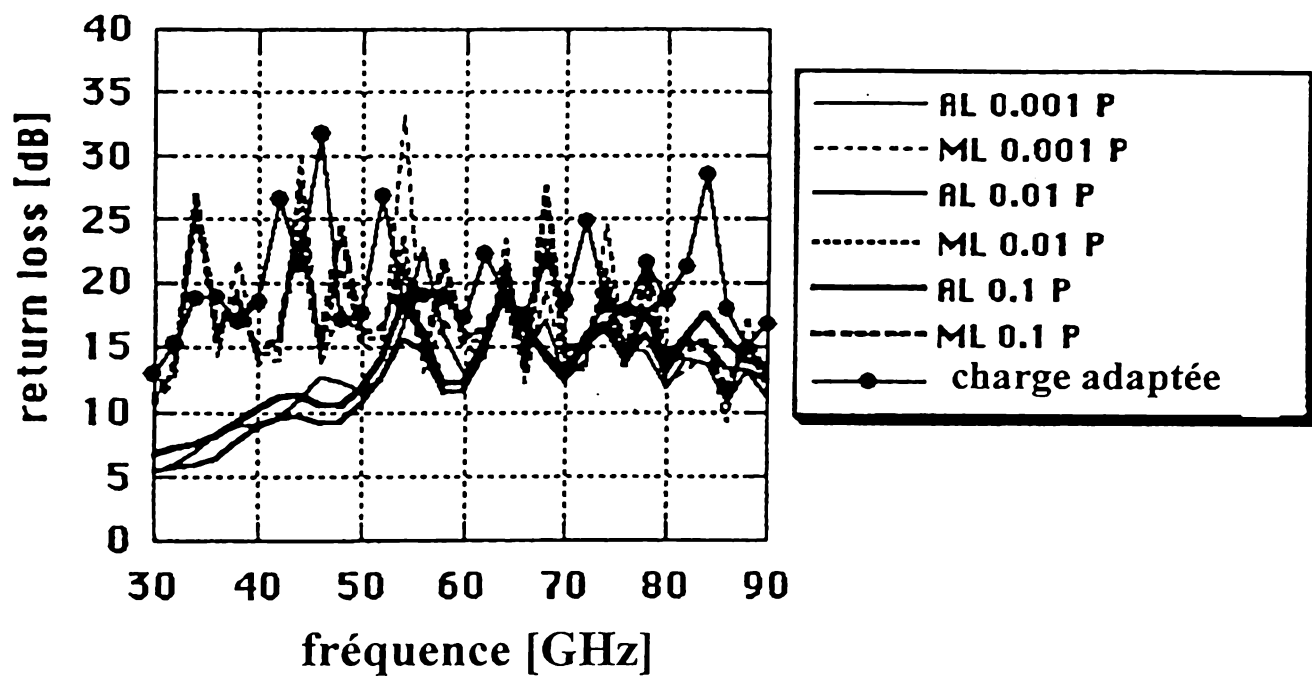


Figure 3.23: Return-loss pour une variation parabolique (P) et différentes valeurs de réflexion pour la technique d'adaptation d'impédance (matched layer ou ML) et pour une zone d'absorption sans adaptation (absorbing layer ou AL) en comparaison avec la condition de charge adaptée .

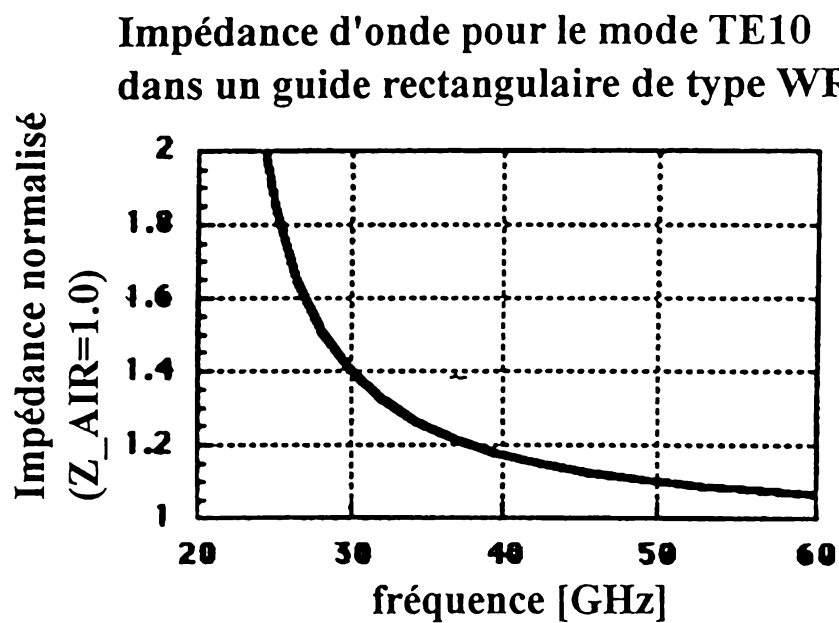


Figure 3.24: *Impédance d'onde pour le mode TE₁₀ dans le guide rectangulaire du test.*

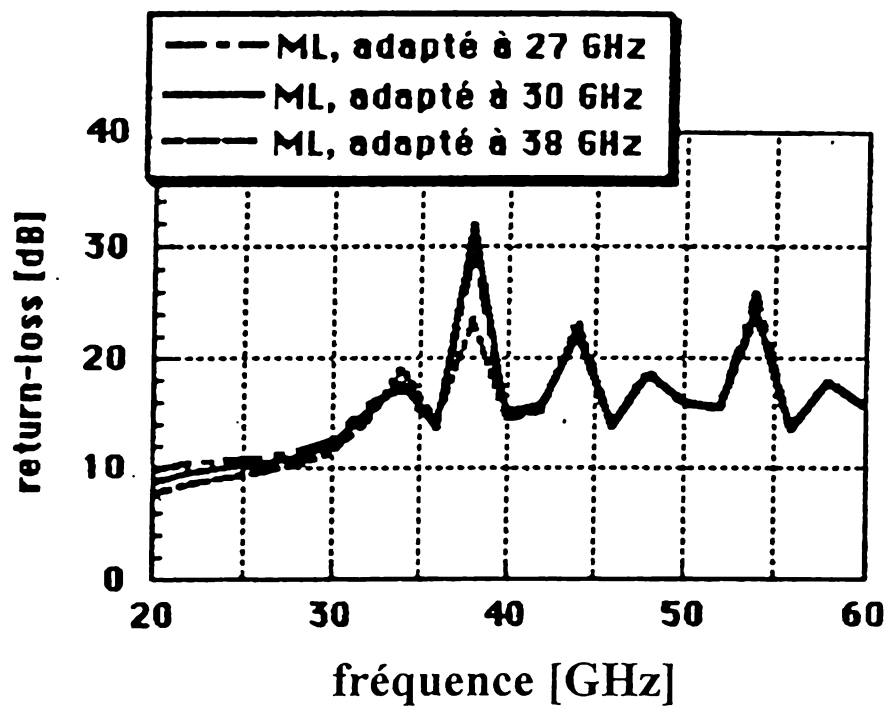


Figure 3.25: Effet de l'adaptation de l'impédance d'onde pour trois fréquences.

calcul). Nous avons également appliqué les conditions d'extrapolation non seulement en bout de ligne, mais tout autour du domaine de calcul.

Afin de tester le cas d'extrapolation à la frontière AIR-(extérieur du domaine de calcul) nous avons déterminé le return-loss pour la réflexion au bout du domaine de calcul. L'application des conditions d'extrapolation à ce cas n'a apporté aucune amélioration par rapport à la condition de charge adaptée. Cela peut être expliqué par le fait que la propagation se fait avec une distribution de champs proche de celle du mode TEM. L'angle d'incidence de l'onde est alors proche de 0 degrés. Dans ce cas les conditions de charge adaptée absorbent toute l'énergie, aussi bien que les conditions d'extrapolation.

L'application des conditions d'extrapolation dans le cas AIR/diélectrique-(extérieur du domaine de calcul) est montrée dans la figure 3.26. La terminaison de la ligne par charge adaptée dans le diélectrique est également montrée dans la figure. La charge adaptée dans le diélectrique est obtenue en appliquant un facteur de réflexion $\Gamma = (1 - \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}) / (1 + \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}})$ aux impulsions sortant la grille (cf. Section 3.1). La figure montre la tension entre le ruban et la masse en fonction du temps et à une distance d'environ 100 noeuds de l'excitation. La forme de l'excitation était une gaussienne.

La figure montre le signal, suivi de la réflexion en bout de ligne pour une charge adaptée, une extrapolation espace-temps du premier ordre et une extrapolation espace-temps du deuxième ordre. La réflexion est minimale pour la condition de charge adaptée. Elle devient plus importante pour la condition d'extrapolation espace-temps du premier ordre et elle devient encore plus importante pour la condition d'extrapolation espace-temps du deuxième ordre. Cela peut être expliqué par le fait que l'application de l'extrapolation espace-temps suppose une vitesse de propagation c_0 , la vitesse de la lumière en espace libre. Par contre les ondes dans le diélectrique se propagent avec une vitesse proche de $c_0 / \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}$. La condition pour la vitesse de propagation des ondes n'est donc pas satisfaite pour ces conditions d'extrapolation.

Nous avons également appliqué les conditions d'extrapolation non seulement au bout mais autour de la ligne pour la partie AIR-(extérieur du domaine de calcul). Après 1500 itérations, dans le cas de l'extrapolation du premier ordre, nous avons remarqué le commencement des instabilités qui produisent une distribution de la puissance guidée dans tout l'espace de calcul. Cet effet est encore plus grand dans le cas de l'extrapolation du deuxième ordre. La puissance guidée après 1500 itérations est montrée dans la figure 3.27. Le niveau blanc commence à 1% de la valeur maximale. On voit qu'une partie de la puissance apparaît à proximité des limites du domaine de calcul. En plus, la puissance n'est plus proprement guidée.

Nous concluons que l'application des conditions d'extrapolation n'apporte aucune amélioration pour les calculs des lignes de transmission micro-ruban. Au contraire, l'application des conditions d'extrapolation mène pour des temps de calcul élevés (de l'ordre 1000 itérations) à des instabilités numériques, conduisant à une perturbation de la distribution de la puissance guidée dans le domaine de calcul.

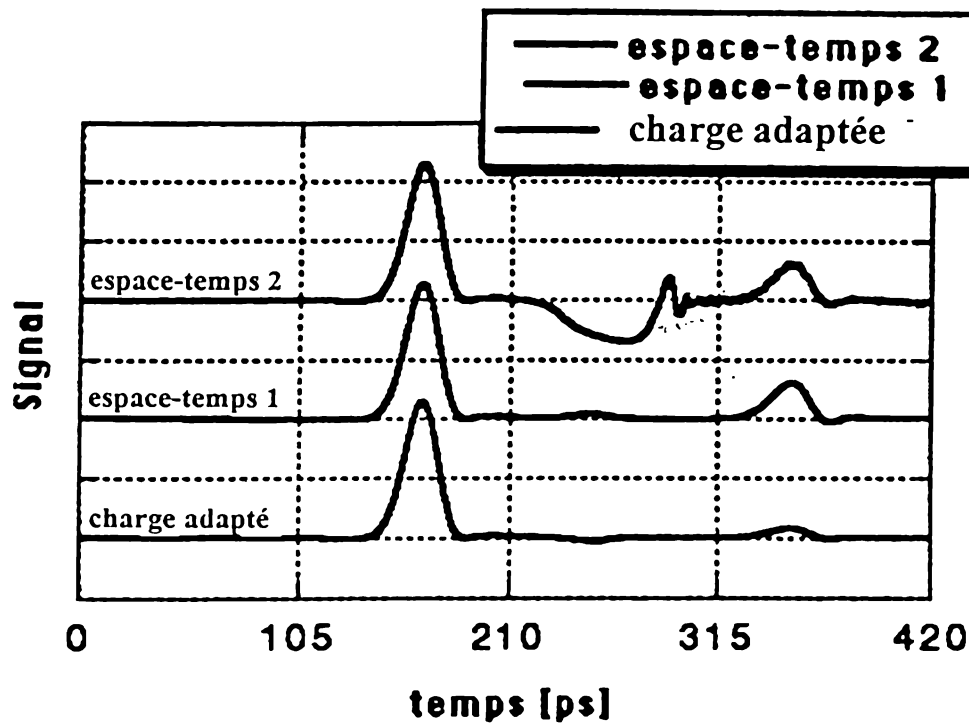


Figure 3.26: Application des conditions d'extrapolation dans le diélectrique d'une ligne de transmission micro-ruban.

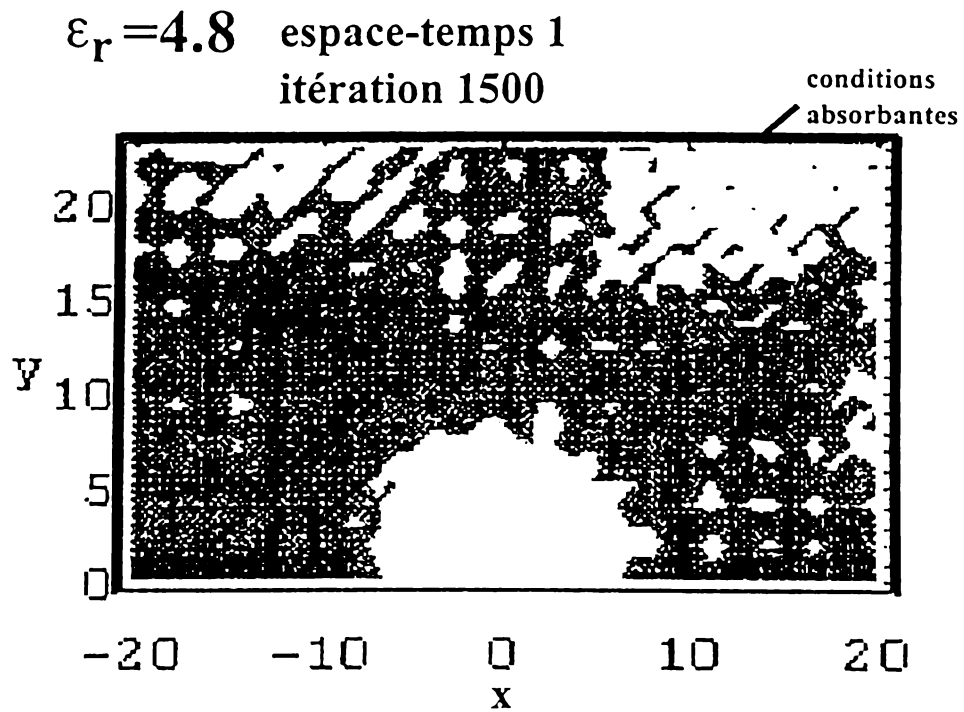


Figure 3.27: Distribution de la puissance guidée en basse fréquence pour une ligne de transmission micro-ruban et des conditions d'extrapolation du premier ordre autour de la ligne après 1500 itérations.

3.3.7 Application des conditions d'extrapolation avec le noeud condensé asymétrique

Nous avons vu que même la condition d'extrapolation la plus simple, l'extrapolation espace-temps 1 donne des instabilités avec le noeud condensé symétrique. Maintenant on peut se poser la question de savoir si cela reste vrai pour les autres noeuds aussi, en particulier pour le noeud condensé asymétrique. Pour répondre à cette question, nous avons remplacé dans le programme TLM la matrice du noeud ponctuel symétrique par la matrice du noeud ponctuel asymétrique. Nous avons testé différentes conditions d'extrapolation.

D'abord, nous avons trouvé que même si la condition d'extrapolation espace-temps du premier ordre est instable avec le noeud ponctuel symétrique, elle est stable avec le noeud ponctuel asymétrique. Les conditions supérieures à la condition espace-temps du premier ordre ont été trouvées instables pour les deux noeuds. Nous nous sommes donc intéressé à la question, de savoir si on obtient une meilleure absorption avec la condition d'espace temps 1 et le noeud ponctuel asymétrique qu'avec la charge adaptée.

Pour cela nous avons mesuré le taux d'ondes stationnaires à une fréquence donnée pour le noeud ponctuel asymétrique dans un guide d'ondes rectangulaire. Nous avons trouvé pour les deux conditions, espace-temps 1 et charge adaptée, un return-loss d'environ 15 dB. Nous constatons alors que l'extrapolation espace-temps 1 n'apporte — même si elle est stable — aucune amélioration par rapport à la condition plus simple, la charge adaptée.

Parce que le noeud ponctuel symétrique est d'une part symétrique et d'autre part moins dispersif, nous avons choisi de rester pour la suite du travail avec ce noeud au lieu d'utiliser le noeud ponctuel asymétrique.

3.4 Conclusion

Dans les Sections précédentes nous avons présenté des schémas d'extrapolation explicites généraux basés sur des approximations de l'équation d'onde unidirectionnelle. Nous avons appliqué ces schémas afin d'estimer les impulsions entrant aux portes limites d'une grille TLM limitée et nous avons comparé la réflexion des ondes aux limites avec la réflexion des ondes obtenues utilisant la "condition classique" de charge adaptée et les premier et deuxième ordre d'extrapolation espace-temps. Nous avons discuté la possibilité d'améliorer l'absorption obtenue par ces schémas en utilisant des techniques de dissipation numérique, de filtrage numérique et en introduisant des zones d'absorption. Nous avons ensuite expérimenté la possibilité d'utiliser des conditions d'extrapolation afin d'améliorer les calculs des propriétés des lignes de transmission micro-ruban. Nous allons résumer nos résultats et donner une perspective pour un futur travail.

3.4.1 Conditions absorbantes aux limites basées sur des schémas d'extrapolation

De nos calculs nous concluons que toutes les conditions aux limites explicites basées sur la discrétisation des approximations de l'équation d'onde unidirectionnelle sont instables. Les instabilités peuvent être typiques pour l'interaction des schémas discrets avec le SCN; elles ne sont pas identiques pour les autres noeuds (p.ex. le noeud condensé asymétrique ou ACN, voir [Sag89])

Nous avons dit que le SCN possède des modes parasites proches de la fréquence de Nyquist (la fréquence de coupure pour la grille); alors que l'ACN ne les possède pas. Nos résultats n'indiquent pas que des modes parasites apparaissent proches de la fréquence de Nyquist. Au contraire, nous trouvons dans nos calculs des modes parasites (indiqués par un *return-loss* négatif pour des fréquences discrètes) bien au dessous de la fréquence de Nyquist (comp. Fig. 3.17).

Il a été rapporté que la méthode TLM utilisant le noeud condensé symétrique est équivalente à un schéma à différences finies de niveau supérieur. Il n'a jamais été déterminé quelles sont les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'un schéma à différences finies appliqué aux impulsions qui se propagent dans la grille TLM soit stable. Des schémas d'extrapolation basés sur une approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle demandent en particulier une méthode qui est stable pour calculer les dérivées partielles sur la grille.

Tous nos schémas d'extrapolation envisagés étaient des schémas explicites. Il est reconnu dans la littérature que des schémas implicites sont souvent stables dans des situations où des schémas explicites sont instables. La discrétisation implicite des opérateurs à dérivées partielles - même si cela demande un effort de calcul plus important - pourrait pour cela donner des schémas stables.

Même les conditions les plus simples testées ont été trouvées instables pour des temps de calcul élevés (1000 itérations et plus). Nous concluons qu'aucune des conditions testées n'est favorable pour faire des calculs d'espace ouvert en utilisant la méthode TLM et le noeud condensé symétrique.

Pour la condition d'extrapolation espace-temps du premier ordre nous avons trouvé qu'elle est stable si on change le noeud ponctuel symétrique en un noeud ponctuel asymétrique. Par contre, nous n'avons pas obtenu une absorption avec cette condition et le noeud ponctuel asymétrique qui soit meilleure que la charge adaptée. Pour les conditions supérieures à l'espace-temps 1, la méthode reste instable même avec le noeud ponctuel asymétrique.

3.4.2 Conditions d'absorption aux limites et techniques des zones d'absorption

La technique d'introduction des zones d'absorption peut être envisagée soit pour améliorer les résultats obtenus avec les conditions d'extrapolation, soit comme technique indépendante pour limiter un domaine de calcul. En tout cas, l'absorption obtenue doit être supérieure à

l'absorption obtenue dans le cas de la condition la plus simple, la charge adaptée, pour que les zones d'absorption apportent une vraie amélioration.

Nous avons testé des zones d'absorption adaptées et non-adaptées pour différents paramètres d'absorption. Afin d'adapter l'impédance du milieu absorbant, nous avons modifié la matrice de répartition du noeud condensé symétrique en introduisant des stubs de conductance magnétique. Dans aucun de nos calculs, les résultats obtenus n'étaient meilleurs que ceux obtenus pour la condition de charge adaptée de la grille.

Une autre possibilité d'introduction des zones d'absorption consisterait à appliquer la théorie des zones absorbantes pour une grille traitée au moyen des différences finies et une connexion de cette grille à une grille TLM en 3D comme cela a été effectué par Eswarappa et al. [Esw95]. Le problème que nous y voyons est qu'une connexion de la méthode TLM avec la méthode des différences finies en 3D demande une zone intermédiaire [Esw96]. Nous avons déjà vu pour les conditions d'extrapolation que le problème des modes parasites — qui provoque une limitation de l'absorption — devient plus sévère lorsqu'on passe de 2D à 3D. En plus, l'efficacité des zones d'absorption dans nos calculs n'est pas meilleure que l'efficacité de la charge adaptée ². Bien que nous n'ayons pas trouvé de données dans la littérature qui peuvent prouver cette supposition, les résultats sur l'absorption en 3D avec les schémas d'extrapolation suggèrent que les mêmes problèmes de stabilité vont apparaître en 3D en utilisant la méthode des différences finies.

Nous concluons alors que les techniques de zones d'absorption ne sont pas prometteuses pour réduire la réflexion aux limites du domaine de calcul par rapport à la condition la plus simple, la charge adaptée de la grille TLM.

3.4.3 Une approche plus directe des conditions absorbantes aux limites pour la méthode TLM

La différence conceptuelle principale de la résolution des équations à dérivées partielles avec la méthode TLM et avec la méthode à différences finies vient de ce que les champs électromagnétiques en un point donné de l'espace avec le schéma à différences finies sont évalués en résolvant une équation explicite (ou implicite), alors que dans la modélisation TLM la propagation des champs est simulée plus directement par des impulsions se propageant le long des lignes de la grille. Le mécanisme de propagation est décrit par des matrices de répartition attachées aux noeuds de la grille. La propagation des champs dans la méthode TLM est donc liée aux matrices de répartition des noeuds.

La matrice de répartition pour le SCN a été dérivée directement des équations de Maxwell en utilisant une décomposition matricielle [LoV93]. Les impulsions de la méthode TLM ont été identifiées aux invariants de Riemann connus de la théorie des équations à dérivées partielles. Une chose intéressante est que les algorithmes qui résolvent les problèmes de propagation des invariants de Riemann (comme p.ex. le Roe-solver élaboré par [Eu194]) sont toujours stables. Si des grilles de calcul décrivant la propagation de champs arbitraires

²Néanmoins, Le Maguer et al. ont trouvé que pour les lignes microrubans, les zones absorbantes marchent très bien [LeM97].

par des matrices de répartition existent et si elles peuvent être interprétées comme des solveurs de Riemann, des noeuds aux limites basés sur une approximation de l'équation d'onde unidirectionnelle existent.

Pour simuler des problèmes d'espace ouvert, nous proposons pour un futur travail le développement d'un noeud aux limites décrivant le flux des ondes quittant la grille limitée de la méthode TLM. Le noeud doit être cherché en formulant et résolvant le problème de Riemann correspondant.

Cette approche est très générale dans le sens où la méthode TML serait conceptuellement élargie afin de résoudre des équations à dérivées partielles arbitraires. La méthode doit d'abord être formulée pour des grilles cartésiennes de maillage uniforme. Une généralisation aux géométries arbitraires en utilisant la géométrie différentielle devrait alors être possible.

Nous notons qu'un noeud aux limites pour la méthode TLM, basé sur l'équation d'onde unidirectionnelle, va toujours donner des réflexions indésirables venant d'une absorption non parfaite des ondes (puisque l'équation d'onde unidirectionnelle peut seulement être approchée par une équation à dérivées partielles). L'avantage principal du développement d'un nouveau type de noeud est - comme nous l'espérons - la stabilité de la méthode.

Chapitre 4

Application de la méthode TLM en espace ouvert: Calcul des paramètres $[S_{ij}]$ et des diagrammes de rayonnement des discontinuités des lignes microrubans

Nous avons utilisé la méthode TLM pour caractériser les discontinuités des lignes de transmission microruban. Une discontinuité dans une ligne microruban est définie comme toute variation de la section droite de la ligne dans la direction de propagation du signal. La caractérisation est basée sur le calcul de la propagation et de la répartition des signaux le long des lignes de transmission pour des structures différentes.

Le signal injecté dans la structure est le même pour tous les calculs: Une excitation gaussienne de la composante E_y (voir figure 4.1) est appliquée dans une section droite en dessous du ruban. La largeur de la gaussienne dans le temps est choisie telle que la transformée de Fourier tombe à 1 % de sa valeur maximale à la fréquence maximale de travail; La fréquence maximale de travail est définie comme la fréquence pour laquelle la longueur d'onde dans la zone de permittivité la plus élevée (ici le substrat de la ligne) est dix fois plus grande que la largeur de la maille la plus grande. Pour tous les calculs nous avons utilisé une grille avec un maillage uniforme.

4.1 Etudes préliminaires: Influence du domaine de calcul

Avant de débiter les calculs nous nous sommes intéressés aux questions suivantes:

1. Quel est l'influence de la hauteur du domaine de calcul sur le signal guidé ?
2. Quel est l'influence de la largeur du domaine de calcul sur le signal guidé ?
3. Quel est l'influence de la fréquence sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné ?
4. Quel est l'influence de la permittivité ϵ_r du substrat sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné ?
5. Quel est l'influence du rapport entre la largeur du ruban et l'épaisseur du substrat sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné ?

Afin de pouvoir répondre à ces questions nous avons fait diverses simulations avec une ligne de transmission microruban dont les dimensions caractéristiques sont montrées sur la figure 4.1.

Les dimensions caractéristiques de la simulation sont la largeur w du ruban, l'épaisseur h du substrat, la hauteur H de la zone libre au dessus du substrat et la distance ℓ entre le ruban et les bords latéraux du domaine de calcul. Les dimensions du domaine de calcul ℓ et H peuvent a priori dépendre de la permittivité ϵ_r du substrat et de la fréquence. L'épaisseur du ruban est supposée être négligeable pour tous nos calculs.

4.1.1 Influence de la hauteur du domaine de calcul sur le signal guidé

Nous avons d'abord fait varier la hauteur H de la zone libre au dessus du substrat. Les distances caractéristiques sont $w = 4$; $h = 2$; $H = 4, 5, 6, 12$; $\ell = 9$ (toutes les valeurs sont en nombre de noeuds). La valeur $\ell = 9$ est choisie telle que $\ell \geq 2w$, ce qui correspond à une règle générale fondée sur l'expérience. Nous avons examiné l'effet de la variation de H sur le return-loss au bout de la ligne terminée par des conditions de charge adaptée.

Nous avons constaté une diminution du return loss pour H de l'ordre de 4 mailles et ce pour des fréquences élevées (proches de la fréquence maximale de travail). Pour $H > 4$ nous ne constatons aucun effet systématique sur le return-loss.

Il nous semble raisonnable que la distance H soit environ la même que la largeur du domaine de calcul déterminée par ℓ ; Il reste alors à trouver la bonne valeur de ℓ .

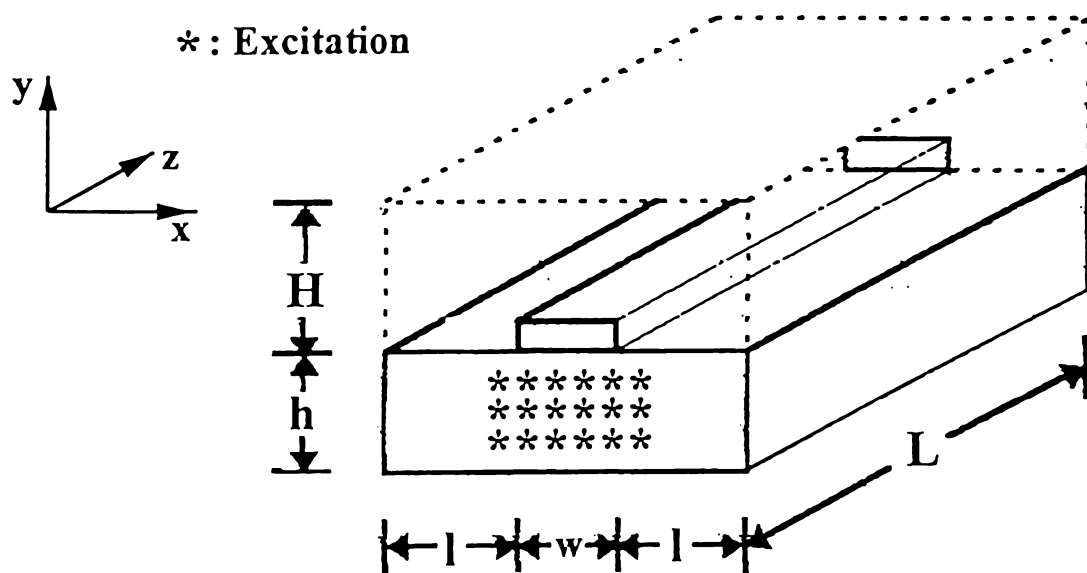


Figure 4.1: *Ligne de transmission microruban et domaine de calcul.*

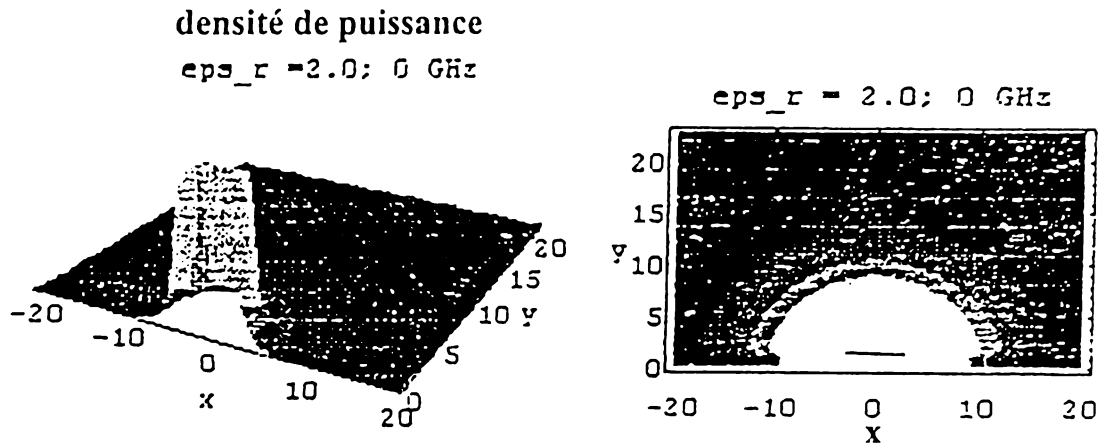


Figure 4.2: Représentation 3D (à gauche) et lignes de niveau (à droite): Distribution de la puissance guidée dans la section droite de la ligne microruban.

4.1.2 Influence de la largeur du domaine de calcul sur le signal guidé

Au lieu de choisir $\ell \geq 2w$, nous voulons déterminer ℓ (et donc H , cf. remarque ci-dessus) de façon que la puissance guidée tombe à un taux de x % de sa valeur maximale (au centre de la ligne) à l'intérieur du domaine de calcul.

Nous avons alors tracé la puissance guidée à la fréquence 0 GHz dans la section droite de la ligne pour un domaine de calcul assez grand ($w = 4$; $h = 2$; $H = 23$; $\ell = 20$). Le résultat est montré dans la figure 4.2: Le ruban se trouve à la hauteur $y = 2$ ($h = 2$) et il va de -2 à $+2$ ($w = 4$). L'échelle pour les lignes de niveau est logarithmique avec une valeur maximale (blanche) au dessus de 1% et une valeur minimale (noir) au dessous de 0.125%. Pour le taux x on choisit à partir de ce graphique $x = 0.125$ par exemple. Le critère pour le choix du domaine de calcul nous permet alors de tronquer le domaine lorsque la puissance guidée est inférieure à 0.125 % de sa valeur maximale (au centre de la ligne).

Nous avons diminué le domaine de calcul en un domaine dont les dimensions sont ($w = 4$; $h = 2$; $H = 15$; $\ell = 15$). Le résultat pour la distribution de la puissance est pratiquement le même que pour le domaine de calcul plus grand. Nous concluons qu'une distance de 15

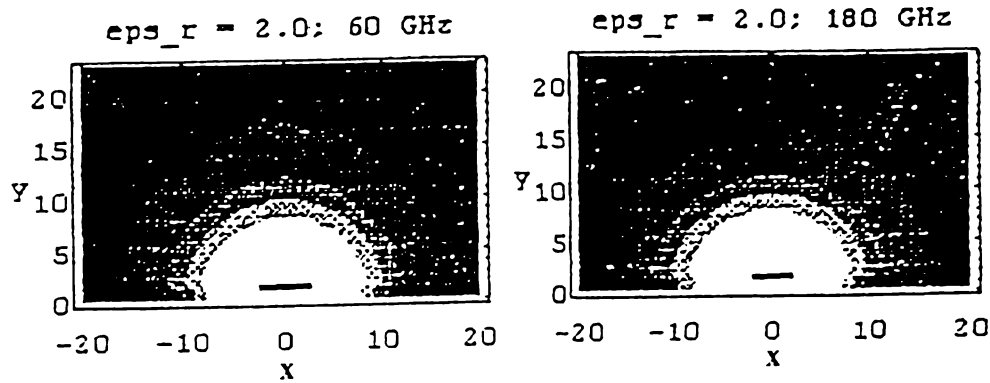


Figure 4.3: *Distribution de la puissance guidée dans la section droite de la ligne microruban pour 60 GHz (à gauche) et 180 GHz (à droite).*

noeuds entre le ruban et les limites du domaine de calcul est ici suffisamment grande pour éviter un changement des résultats avec une variation des distances ℓ et H .

4.1.3 Influence de la fréquence sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné

La question se pose de savoir si la distribution de la puissance guidée dépend de la fréquence de travail. Pour le maillage que nous avons utilisé la fréquence maximale de travail était 80 GHz. La figure 4.3 montre que même pour des fréquences au dessus de la fréquence maximale de travail, la distribution de la puissance guidée par la ligne dans le domaine de calcul ne change guère. Nous concluons que la détermination de la puissance guidée à la fréquence 0 GHz est suffisante pour pouvoir fixer les distances minimales nécessaires entre le ruban et les limites du domaine de calcul.

4.1.4 Influence de la permittivité ϵ_r du substrat sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné

Nous nous demandons maintenant quelle est l'influence de la permittivité ϵ_r du substrat sur le signal. Pour un maillage donné, nous savons que la fréquence maximale de travail et donc la dispersion du signal dépend de ϵ_r . Nous avons choisi une excitation pour $\epsilon_r = 4.8$

et nous avons fait avec cette excitation 5 calculs avec $\epsilon_r = 2.0, 4.8, 8.0, 16.0, 32.0$. L'effet sur la dispersion du signal est montré dans la figure 4.4: La figure montre la tension en fonction du temps à une distance de 80 noeuds de l'excitation. Pour $\epsilon_r = 4.8$ déjà le signal est légèrement déformé. Pour $\epsilon_r = 16$ l'effet du maillage comme filtre passe-bas est clairement visible.

L'effet de ϵ_r sur la distribution de la puissance guidée est montré dans la figure 4.5: La variation de ϵ_r n'est pas très visible dans la puissance guidée, bien que pour ces valeurs de ϵ_r la dispersion dans la grille n'est pas du tout négligeable. Nous concluons d'une part que la distribution de la puissance guidée dans le guide ne donne aucune indication sur l'erreur commise due à la dispersion du signal dans la grille, et d'autre part, que la permittivité influence très peu la distribution de la puissance. Le choix de ℓ et H est donc indépendant de la permittivité.

4.1.5 Influence du rapport entre la largeur du ruban et l'épaisseur du substrat sur le signal guidé pour un domaine de calcul donné

Comme dernière étude nous comparons pour ($w = 4; H = 23; \ell = 20$) deux rapports entre la largeur du ruban et l'épaisseur du substrat $w/h = 2$ respectivement $w/h = 1$. Le résultat est montré dans la figure 4.6: On en déduit que si on augmente l'épaisseur h du substrat, les champs se distribuent sur une surface plus grande dans le domaine de calcul. Garder le critère $x = 0.125$ demanderait ici un domaine de calcul encore beaucoup plus grand que celui utilisé. Si on garde la distance de 15 noeuds entre le ruban et les limites, on voit que la puissance tombe quand même au dessous de 1 % de sa valeur maximale. Pour des raisons d'espace mémoire nous proposons d'utiliser 15 noeuds, sachant que l'erreur introduite par les limites va être d'autant plus grande que le rapport entre w et h est grand. D'autre part, pour les simulations l'épaisseur h ne doit pas être choisie trop petite pour ne pas avoir une erreur de discrétisation trop grande. Si on veut simuler des rapport w/h grands, on sera donc obligé de choisir plus de 4 noeuds afin de discrétiser la largeur du ruban. Il en résulte une demande de plus de 15 noeuds de distance entre le ruban et les limites, et donc une demande d'espace mémoire plus importante pour des grands rapports entre w et h .

4.1.6 Conclusion

Nous avons étudié l'influence des différent paramètres ($w; h; \epsilon_r; H; \ell$) déterminant la simulation des lignes microrubans. D'abord nous avons testé l'influence de la hauteur du domaine de calcul H sur le return-loss au bout d'une ligne microruban. Nous trouvons que le return-loss est peu sensible à la variation de ce paramètre. Nous avons alors décidé d'utiliser la puissance guidée comme critère afin d'estimer les distances H et ℓ qui déterminent la taille du domaine de calcul.

Avec le critère imposant que la puissance guidée tombe à une valeur de 0.125 % de sa valeur maximale à l'intérieur du domaine de calcul, pour $w = 4$ et $w/h = 2$, il en découle

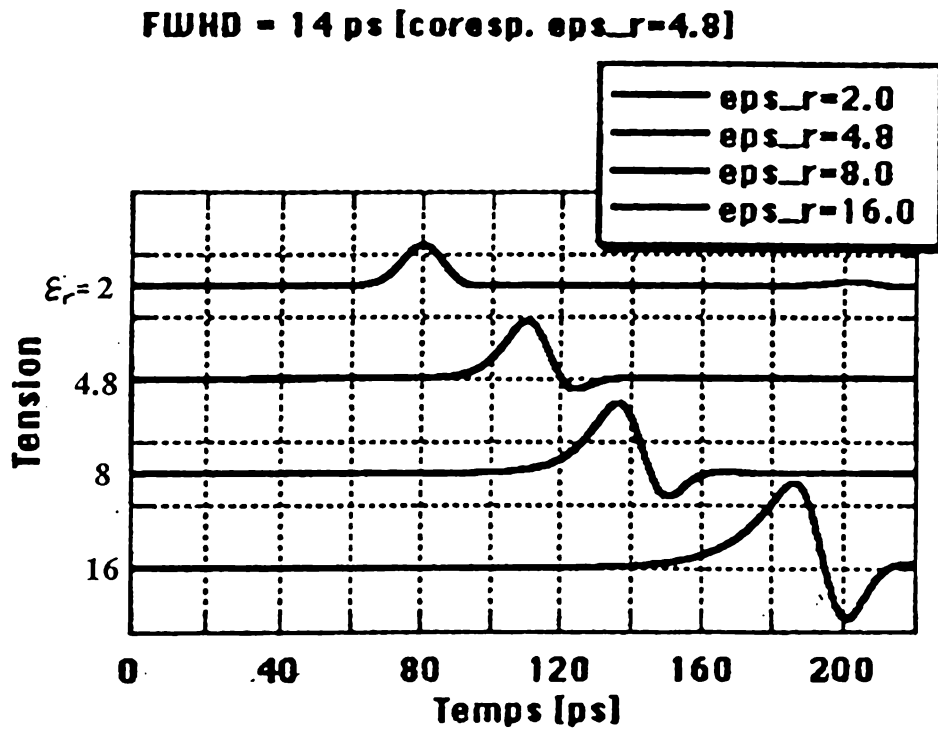


Figure 4.4: *Signal transitoire pour une excitation gaussienne et différentes valeurs de ϵ_r .*

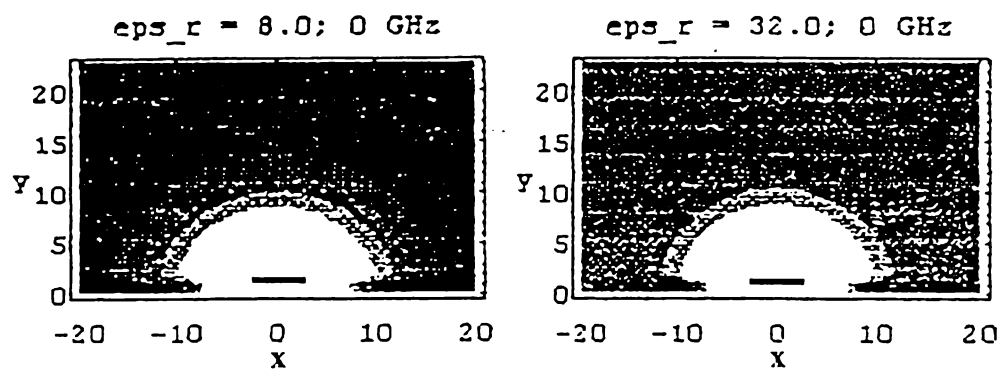


Figure 4.5: *Distribution de la puissance guidée dans la section droite de la ligne microruban pour $\epsilon_r = 8.0$ (à gauche) et $\epsilon_r = 32.0$ (à droite).*

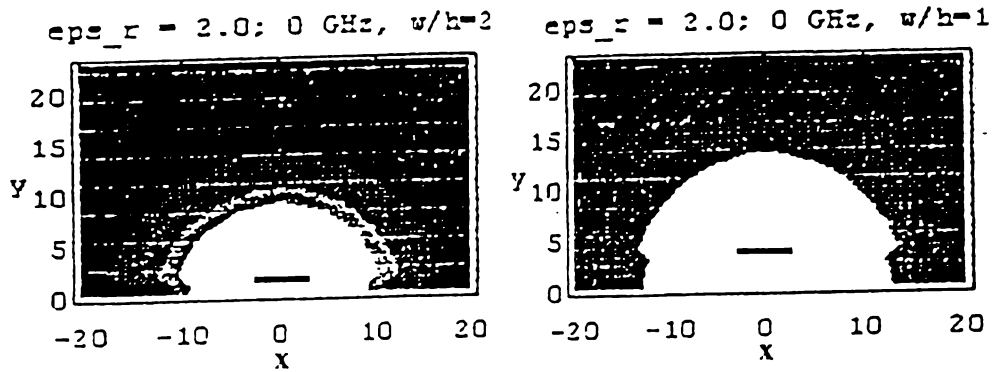


Figure 4.6: *Distribution de la puissance guidée dans la section droite de la ligne micro-ruban pour $w/h = 2$ (à gauche) et $w/h = 1$ (à droite).*

une distance nécessaire de 15 noeuds entre le ruban et les limites du domaine de calcul. Cette distance ne dépend ni de la fréquence, ni de la permittivité du substrat. Par contre, si on augmente l'épaisseur h du substrat les champs se distribuent sur une surface plus grande dans le domaine de calcul.

Avec une distance de 15 noeuds entre le ruban et les limites, $w = 4$ et $w/h = 1$ on trouve que la puissance tombe au dessous de 1 % de sa valeur maximale, ce qui nous semble toujours acceptable.

Nous proposons de garder une distance entre le ruban et les limites du domaine de calcul d'au moins 15 noeuds pour un ruban de largeur 4 noeuds. Les champs vont être d'autant plus confinés autour du ruban que le rapport w/h sera grand. D'autre part, on désire avoir plusieurs noeuds entre le ruban et la masse afin de diminuer l'erreur de la discrétisation. Nous utilisons dans la suite de la Section un rapport $w/h = 4/3$, ce qui présente un compromis entre l'erreur due à la discrétisation et l'erreur due aux limites du domaine de calcul.

4.2 Calcul des paramètres $[S_{ij}]$ pour deux lignes micro-rubans couplées

Afin de calculer les effets de couplage dans des circuits hautes fréquences nous utilisons une technique de modélisation électromagnétique basée sur la méthode TLM. Cette méthode

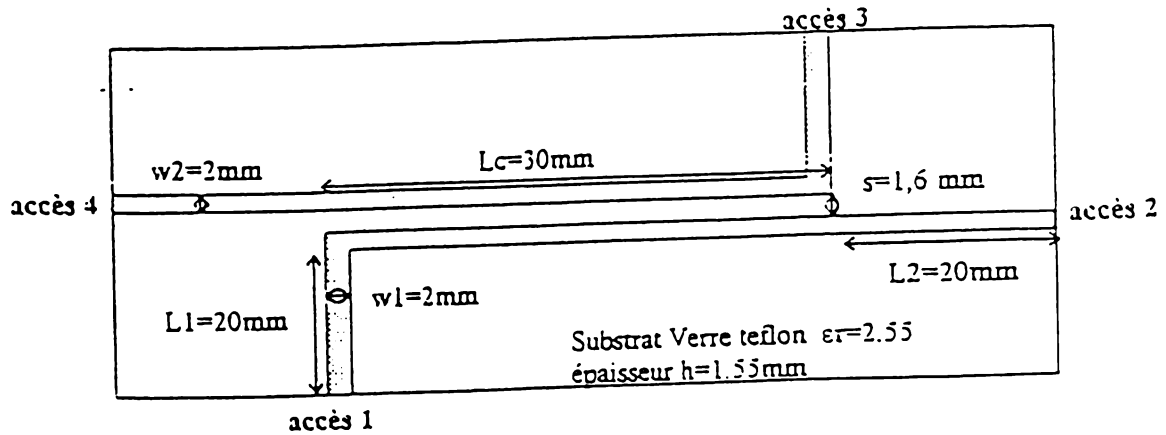


Figure 4.7: *Structure analysée: coudes et lignes microrubans couplés*

permet de calculer la distribution du champ électromagnétique dans la structure et d'en déduire les paramètres S dans les plans d'accès préalablement définis.

La figure 4.7 montre la structure étudiée. Elle consiste en deux lignes couplées avec deux coudes en entrée-sortie. Le couplage et l'influence des coudes sur le couplage sont étudiés en excitant la structure en 1, puis en 2 et en enregistrant les signaux de couplage arrière et de couplage avant.

Afin d'évaluer les paramètres de couplage, la structure est excitée à l'accès 1 puis à l'accès 2. L'excitation temporelle est une gaussienne de largeur à mi-hauteur égale à 20 ps. Les paramètres de l'excitation sont choisis en concordance avec la discrétisation temporelle et spatiale nécessaires à la simulation par la méthode TLM. Les paramètres S sont calculés à partir des signaux réfléchis et transmis dans le domaine temporel.

La simulation TLM donne accès aux tensions et courants temporels aux accès de la structure. Les paramètres S sont calculés ensuite en utilisant une transformée de Fourier directe. Par exemple pour un quadripôle:

$$S_{11} = \sqrt{\frac{V_r(\omega)I_r^*(\omega)}{V_i(\omega)I_i^*(\omega)}} \quad S_{21} = \sqrt{\frac{V_t(\omega)I_t^*(\omega)}{V_i(\omega)I_i^*(\omega)}}$$

Les indices i , r , t désignent respectivement les signaux incidents, réfléchis et transmis. Ces différents signaux sont déterminés à partir des signaux observables obtenus par la méthode TLM en utilisant des fenêtres temporelles appropriées. L'utilisation des fenêtres temporelles a permis de faire les calculs sans ligne de référence. La figure 4.8 montre la tension observée à l'accès 1. On distingue bien le signal incident et la réflexion sur le coude.

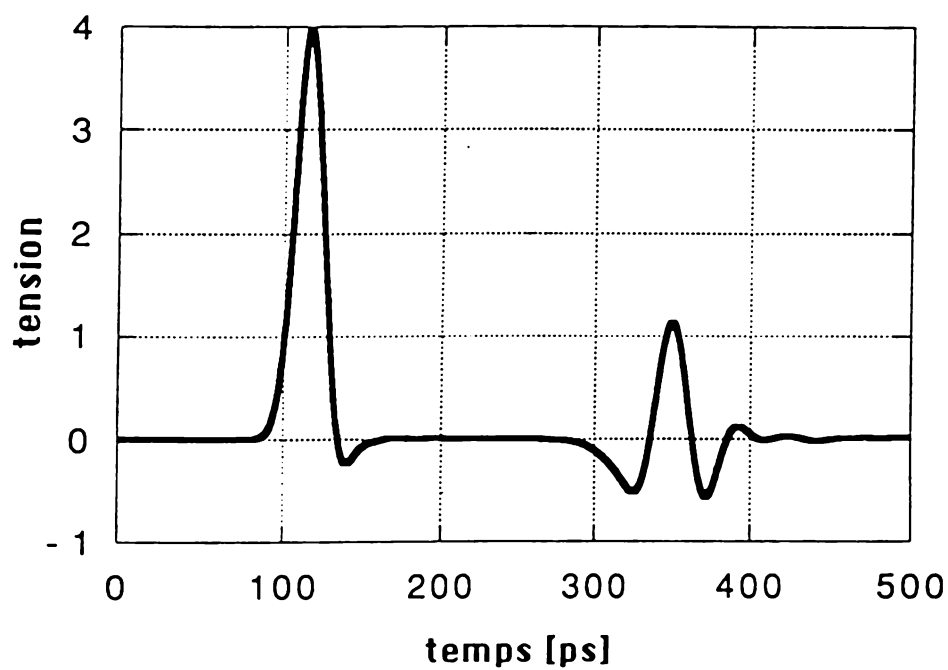


Figure 4.8: *Exemple de signaux incident et réfléchi observés à l'accès 1*

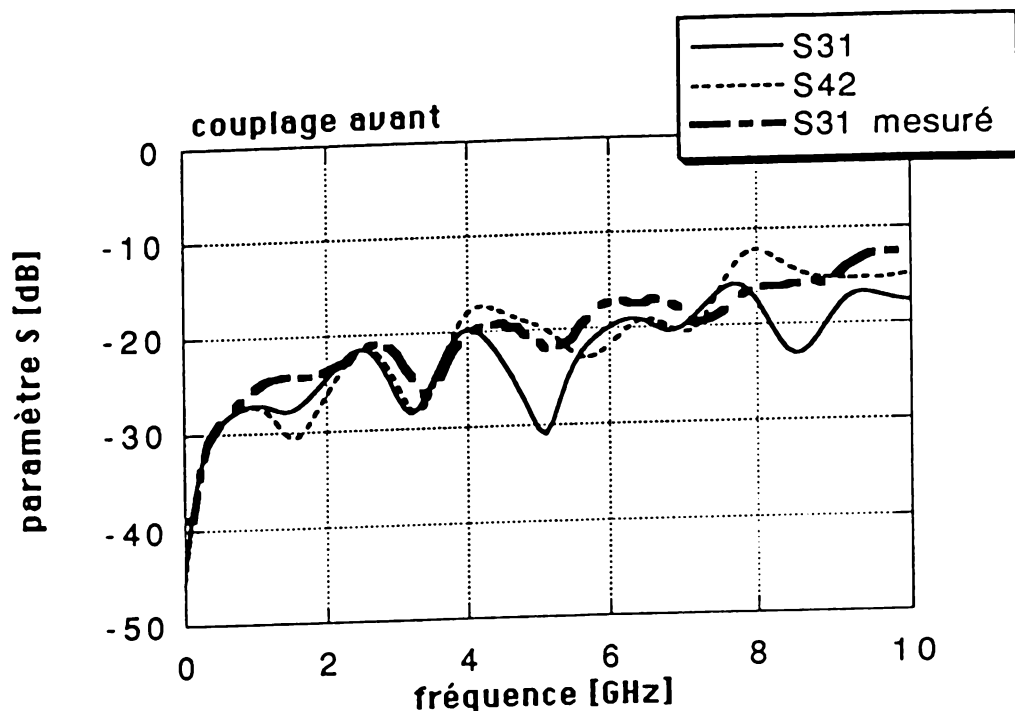


Figure 4.9: Comparaison des paramètres S_{31} , S_{42} simulés et S_{31} mesuré.

Nous présentons ici les paramètres S pour le dispositif de la figure 4.7 dans la gamme de fréquence de 0 à 10 GHz. Les figures 4.9 (4.10) montrent les paramètres S_{31} (S_{41}), S_{42} (S_{32}) simulés ainsi que S_{31} (S_{41}) mesurés de 0 à 10 GHz. En vue de la comparaison avec des mesures, ces paramètres S simulés ont été 'renormalisés' par rapport à 50 Ohm. Sur ces figures, on observe une assez bonne concordance entre les simulations et la mesure. La comparaison entre les paramètres S_{31} et S_{42} permet d'évaluer l'influence des coudes sur le couplage. L'écart observé sur ces paramètres étant variable en fonction de la fréquence, une analyse des signaux temporels est plus significative. La figure 4.11 montre la comparaison des tensions de couplage avant, observés sur l'accès 3 lorsque l'excitation est en 1, et sur l'accès 4 lorsqu'on excite en 2. On note une différence d'amplitude d'un facteur 3.5 environ. Cette différence est due principalement à la dégradation du temps de montée d'une part au niveau des coudes pour le signal incident sur l'accès 1, et d'autre part pour le signal sortant sur l'accès 3.

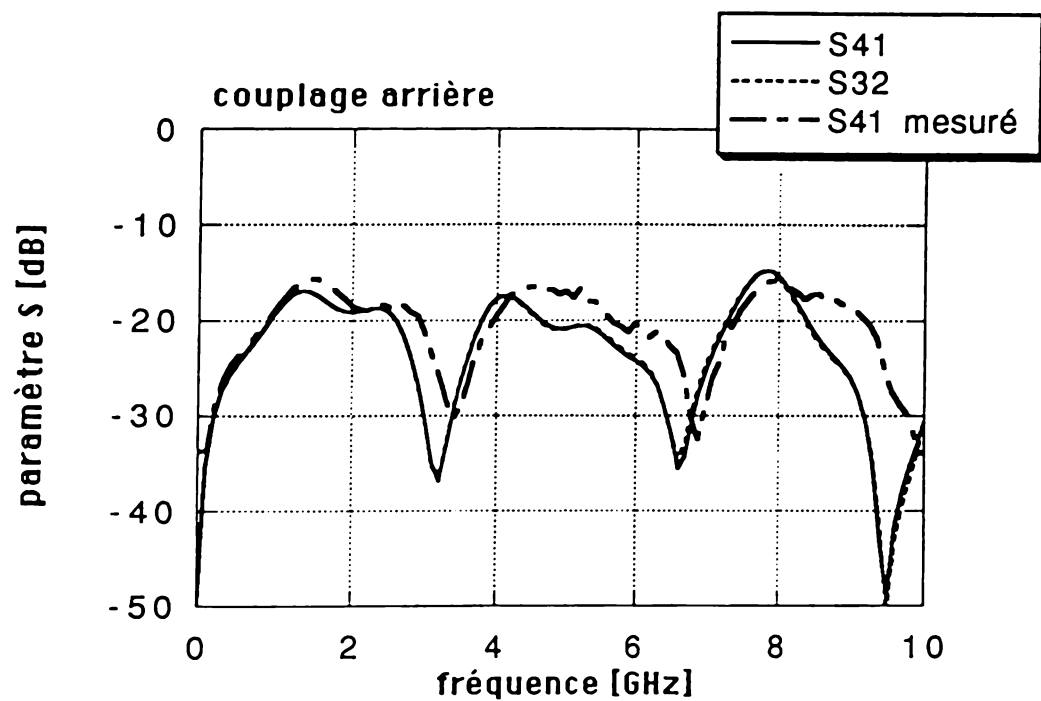


Figure 4.10: Comparaison des paramètres S_{41} , S_{32} simulés et S_{41} mesuré.

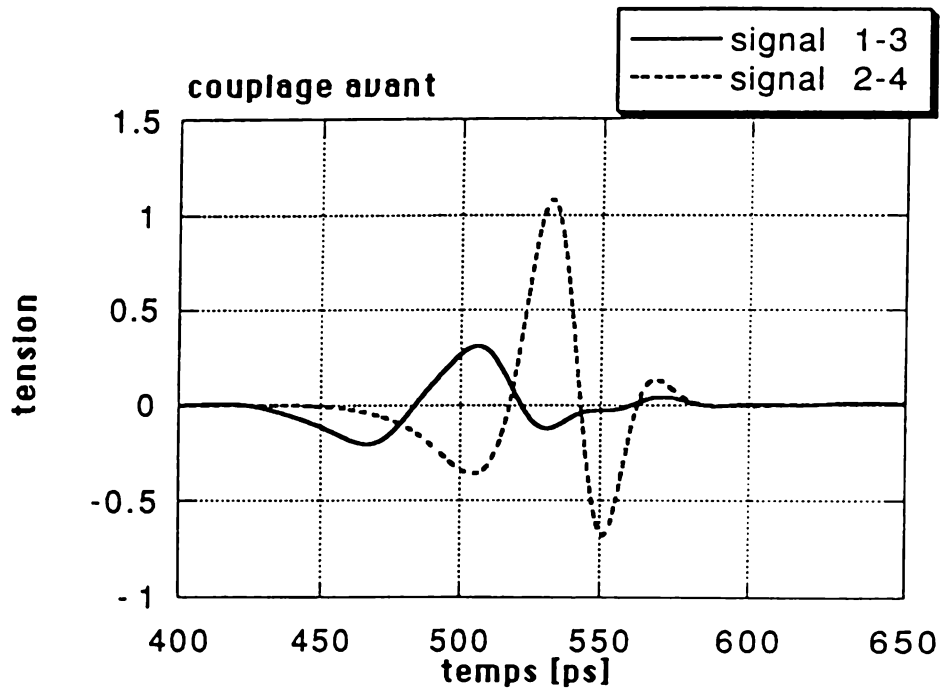


Figure 4.11: *Influence des coudes sur les signaux de couplage avant (excitation d'amplitude 4).*

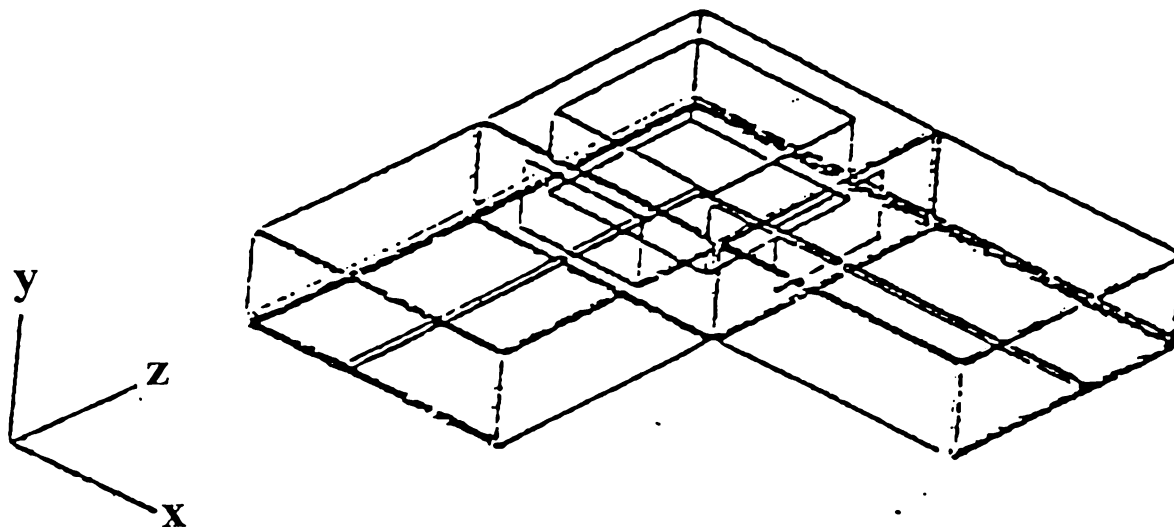


Figure 4.12: *Vue 3D du domaine de calcul pour le calcul des diagrammes de rayonnement en champ proche. La boîte enfermant la discontinuité est constituée de 5 plans de sortie.*

4.3 Calcul du diagramme de rayonnement en champ proche pour le coude

Dans la figure 4.12 nous montrons la disposition pour les calculs du diagramme de rayonnement en champ proche. Le coude est testé dans 5 plans de sortie qui forment une boîte autour de la discontinuité. Dans ces plans de sorties, le vecteur de Poynting est calculé dans le domaine fréquentiel par transformation de Fourier. Les diagrammes de rayonnement en région proche sont alors obtenus en évaluant le flux du puissance sur un cercle dans le plan x - z et sur un cercle dans le plan x - y (voir la figure 4.12).

Des lignes de niveau indiquant le flux de puissance par les murs de la boîte qui enferment la discontinuité sont montrées dans la figure 4.13. Les figures montrent des zones de la puissance passant par les parois qui enferment la discontinuité. Les graphiques à 10 GHz

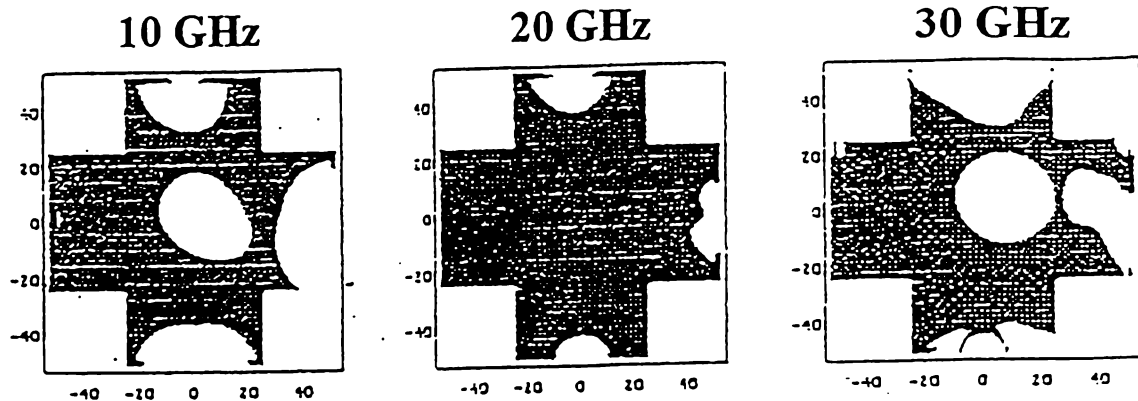


Figure 4.13: Lignes de niveau de la puissance sortant la boîte.

et à 20 GHz sont mis à la même échelle: Le lobe supérieur disparaît à l'échelle de 20 GHz. Pour le graphique à 30 GHz nous avons changé l'échelle pour montrer qu'il y a toujours un lobe au dessus. Ce lobe est faible comparé à la puissance rayonnée frontalement.

Cela peut être vu encore plus clairement dans les diagrammes de rayonnement en région proche montrés dans la figure 4.14. Les lobes ont été normalisés en unités arbitraires en divisant par la puissance entrant à la fréquence correspondante. Nous voyons que le lobe frontal (plan x-z) devient de plus en plus important avec l'augmentation de la fréquence. Par contre, le lobe du dessus (plan x-y) devient de moins en moins important comparé au lobe frontal. Pour de basses fréquences il apparaît aussi un petit lobe en direction contraire de la direction du coude.

La boîte nous a permis de définir un troisième paramètre décrivant la puissance perdue due au rayonnement du coude. La puissance rayonnée est obtenue en intégrant le flux du vecteur de Poynting autour de la boîte. Afin de pouvoir séparer le rayonnement des signaux passants nous avons supprimé les surfaces où la ligne de transmission passe.

Les résultats sur le paramètre de transmission, le paramètre de réflexion et le paramètre de rayonnement sont montrés dans la figure 4.15. Le rayonnement commence avec la réflexion et domine à partir de 30 GHz. La somme des trois paramètres doit être égale à 1 à cause de la conservation de l'énergie. Dans le calcul, elle est plus petite que 1. Cela indique qu'une partie du rayonnement est sorti par les plans supprimés dans l'intégration du flux du vecteur de Poynting.

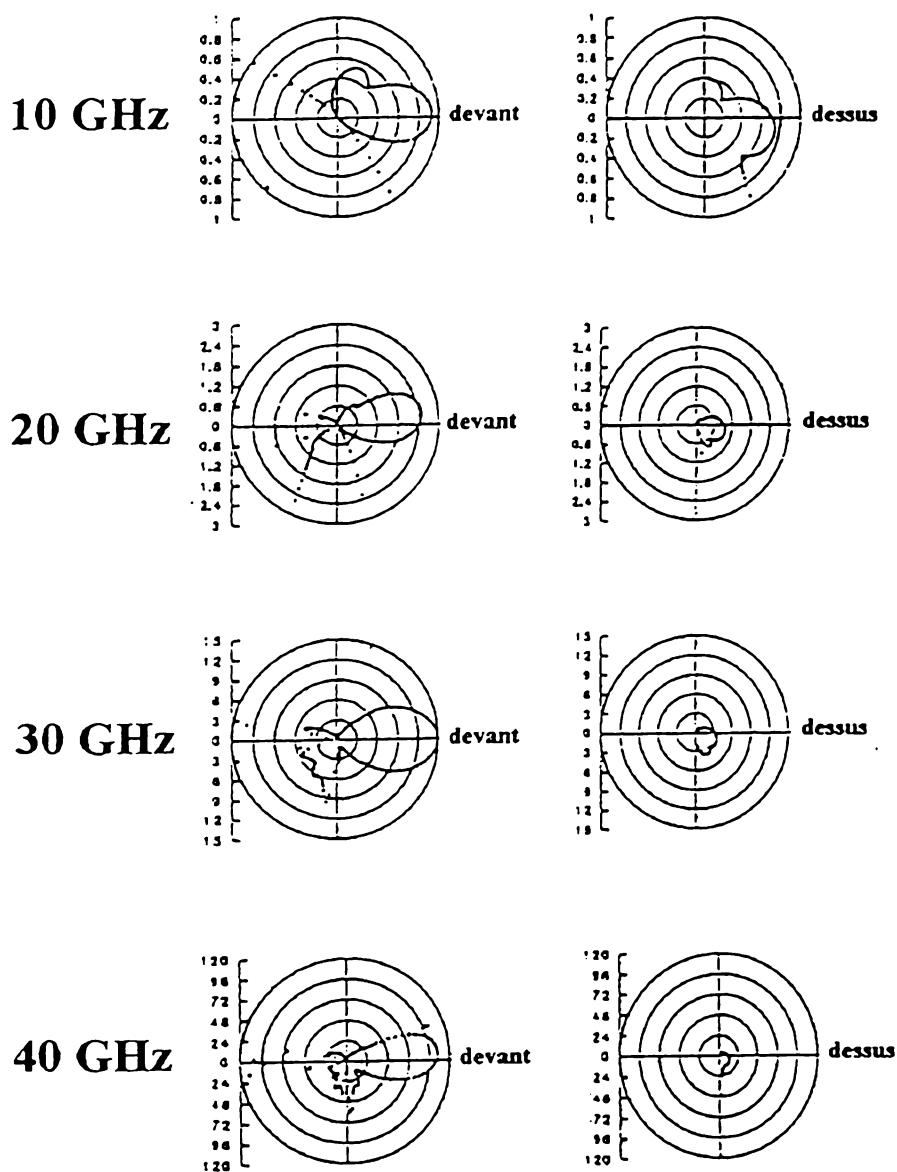


Figure 4.14: Diagrammes de rayonnement en champ proche dans le plan $x-z$ (à gauche) et dans le plan $x-y$ (à droite). Dans le plan $x-z$ le coude vient de la gauche et va vers le bas. Dans le plan $x-y$ le top du coude se trouve à droite du diagramme.

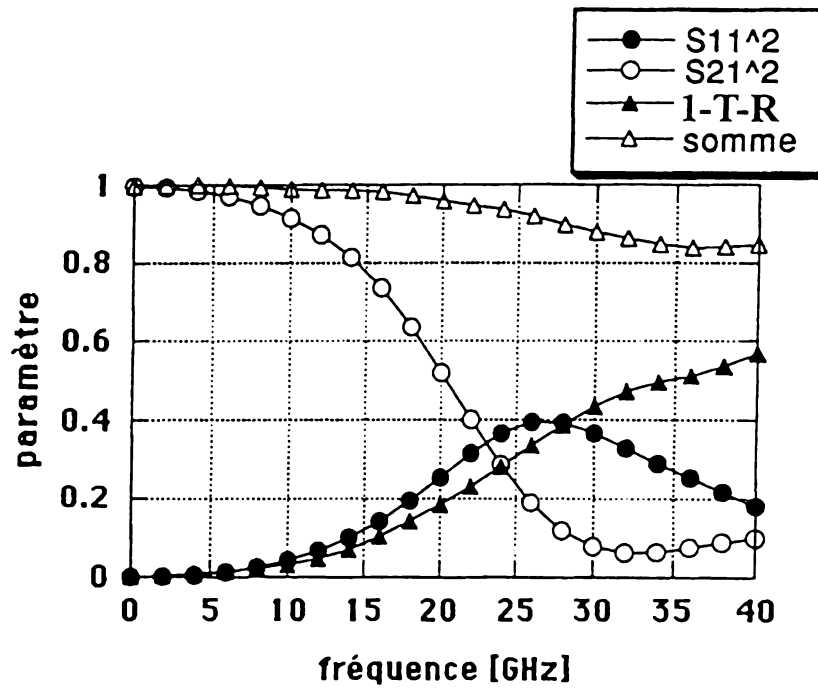


Figure 4.15: Partie transmise S_{21} , partie réfléchie S_{11} et partie rayonnée $1 - T - R$ de l'énergie pour le coude micro-ruban. La somme des trois parties est également montrée (voir texte).

4.4 Calcul du diagramme de rayonnement en champ lointain pour le coude

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain sont obtenus à partir des courants de surface sur la ligne en utilisant la théorie des potentiels. Les courants ont été calculés le long d'une surface de 30×30 mailles. Le plan de masse est simulé par introduction de courants miroirs (de signe contraire). Les courants sur la ligne sont obtenus en chaque point à partir du champ magnétique en utilisant la loi d'Ampère $J = \int_C H dl$ où C est un chemin de contour autour du point. Le potentiel vecteur peut alors être calculé par:

$$A(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mu J(\omega) \frac{\exp(-jkR)}{R} dV \quad (4.1)$$

où $k = \omega/c$ est le vecteur d'onde et R est la distance entre le courant $J(\omega)$ et le point d'évaluation du potentiel. Le potentiel vecteur nous permet de calculer les champs électriques et magnétiques lointains

$$E(\omega) = -j\omega A(\omega) - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot A(\omega)) \quad (4.2)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\mu} \nabla \times A(\omega) \quad (4.3)$$

Dans l'Eqn. 4.1 l'intégration sur le volume V doit être faite en intégrant sur la surface et la surface miroir comme discuté au dessus. A partir des champs électriques et magnétiques le flux de puissance peut être calculé via le théorème de Poynting

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \int \Re(E \times H^*) ds \quad (4.4)$$

où \Re désigne la partie réelle.

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain sont montrés dans la figure 4.16. Les lobes ont tous été normalisés au moyen d'une division par la puissance entrant à la fréquence correspondante. Nous voyons d'abord que le rayonnement dans le plan du coude (plan x-z) peut être négligé par rapport au rayonnement au dessus du coude (plan x-y). Le lobe du dessus (plan x-y) devient de plus en plus important avec l'augmentation de la fréquence. Le diagramme montre le lobe artificiel du dessous, symétrique du lobe du dessus, qui n'existe pas en réalité. Ce lobe vient de la technique des courants miroirs utilisée.

4.5 Conclusion

Dans les sections précédentes nous avons regardé l'application de la méthode TLM en espace ouvert. Pour obtenir la condition de l'espace ouvert nous avons utilisé la condition de la charge adaptée aux limites du domaine de calcul. Nous avons examiné comment il faut

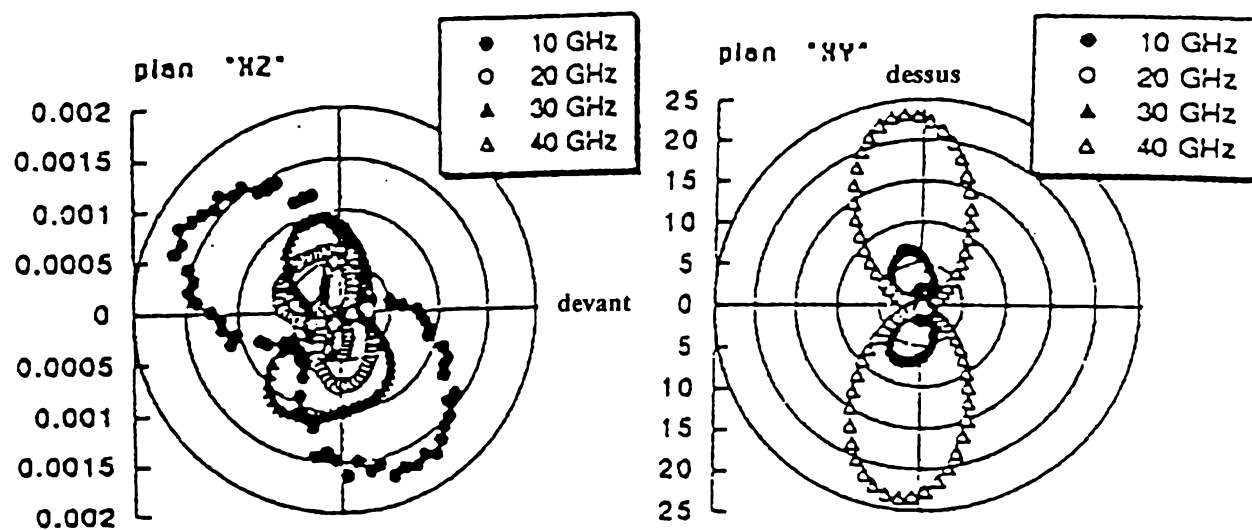


Figure 4.16: Diagrammes de rayonnement dans le champ lointain dans le plan $x-z$ (à gauche) et dans le plan $x-y$ (à droite). Des échelles (unités arbitraires) nous concluons que le rayonnement dans le plan $x-z$ peut être négligé.

choisir la hauteur et la largeur du domaine de calcul pour que le signal guidé le long de la ligne ne soit pas perturbé par les limites du domaine de calcul. Nous avons également étudié l'influence de la permittivité ϵ_r , de la fréquence et du rapport entre la largeur du ruban et l'épaisseur du substrat w/h . Nous avons trouvé que pour une largeur $w = 4$ mailles une distance de 15 noeuds est suffisante pour que le signal guidé tombe jusqu'à 1% de sa valeur maximale aux limites du domaine de calcul. On a l'impression que dans ce cas le signal n'est pas perturbé par les conditions aux limites de charge adaptée. La distance ne dépend ni de la fréquence ni de la permittivité du substrat.

Comme exemple d'application nous avons fait des calculs pour deux lignes micro-rubans couplées et pour un coude. Dans le cas des deux lignes micro-rubans couplées nous nous sommes intéressés aux paramètres S de couplage ainsi qu'à l'influence des coudes sur le couplage. Pour comparer, nous avons mesuré les paramètres de couplage. Les résultats de calcul sont en bon accord avec les résultats de mesure. En comparant les signaux de couplage en avant nous trouvons qu'il y a une influence non négligeable des coudes sur le signal en temporel.

Dans le cas du coude nous nous sommes intéressés aux diagrammes de rayonnement en champ proche et en champ lointain. Pour chaque plan de sortie nous avons calculé la puissance qui sort. Nous avons présenté les résultats sous forme des diagrammes de rayonnement. On trouve des lobes frontaux et des lobes vers le haut. En plus, notre méthode nous a permis de calculer la partie transmise, la partie réfléchie et la partie rayonnée de la puissance. On voit que la partie rayonnée devient de plus en plus importante en augmentant la fréquence. Pour obtenir le champ lointain, nous avons calculé les courants sur les métallisations du coude. A partir des courants on obtient le potentiel vecteur et ainsi, les composantes E et H du champ électromagnétique à grande distance. On calcule alors le flux de puissance via le théorème de Poynting ce qui donne le diagramme de rayonnement en champ lointain. Nous avons trouvé que le coude rayonne essentiellement vers le haut. Le rayonnement augmente lorsqu'on augmente la fréquence.

Chapitre 5

Conclusion

La méthode TLM permet le calcul des champs électromagnétiques qui se propagent le long des lignes micro-rubans et des discontinuités des lignes micro-rubans. Elle permet donc en particulier l'étude du couplage entre des lignes et du rayonnement des discontinuités. Pour l'étude du rayonnement il faut utiliser la méthode TLM dans l'espace ouvert, c'est à dire que les ondes créées à l'intérieur du domaine de calcul doivent sortir librement de la grille.

Pour la méthode TLM une condition d'espace ouvert est déjà connue et largement utilisée: la charge adaptée. Cependant, dans la littérature d'autres conditions sont décrites. Pour la méthode des différences finies par exemple des méthodes d'extrapolation ont été proposées ainsi que l'introduction de zones d'absorption. Notre premier objectif était de voir si on pourrait améliorer la méthode TLM en espace ouvert en utilisant une de ces conditions au lieu de la charge adaptée qui possède des réflexions résiduelles.

Les premiers essais ont été faits avec une grille en 2 dimensions des noeuds condensés symétriques. Pour cela nous avons court-circuité les noeuds condensés symétriques dans la troisième direction. Nous avons appliqué une condition d'extrapolation, la condition de Lindmann, au bout de la grille et nous avons mesuré le taux de réflexion: La réflexion peut être réduite jusqu'à 0.025% en augmentant l'ordre de l'approximation dans nos calculs. Ce résultat était prometteur et nous a encouragé à essayer ces conditions dans une grille en 3 dimensions avec le noeud condensé symétrique.

Pour les calculs en 3 dimensions nous avons utilisé un guide d'onde terminé dans la section droite par une paroi absorbante. D'abord, nous avons essayé des conditions d'extrapolation espace-temps et la condition de Lindmann. Pour les conditions d'extrapolation espace-temps l'absorption est meilleure lorsqu'on augmente l'ordre d'extrapolation. Pour la condition de Lindmann ce n'est plus vrai. Dans tous les cas, l'absorption est meilleure qu'avec la condition classique: la charge adaptée. La condition d'extrapolation espace-temps donne des résultats aussi bons que la condition de Lindmann, mais est limitée à l'ordre 2. Nous avons donc cherché une condition qui pourrait réduire la réflexion encore plus en augmentant l'ordre. Pour cela nous avons testé une formulation équivalente à la condition de Lindmann, la formulation de Higdon-Keys. Cependant, pour cette formulation nous avons trouvé que

l'absorption diminue en augmentant l'ordre. Nous avons essayé d'améliorer cette condition en insérant des constantes de dissipation numérique et en changeant les paramètres de la condition (les angles d'absorption totale). Dans tous les cas les résultats n'étaient pas meilleurs qu'avec la charge adaptée.

Nous avons alors essayé d'améliorer les résultats obtenus avec la condition d'extrapolation espace-temps en appliquant une méthode d'annihilation des modes parasites à la fréquence Nyquist de la grille. Cela n'a apporté aucune amélioration.

Une autre méthode d'absorption des ondes aux limites consiste à introduire des zones d'absorption aux limites du domaine de calcul. On peut adapter l'impédance d'une telle zone à l'impédance de l'air en introduisant une conductivité magnétique. Pour cela, nous avons changé les éléments de la matrice du noeud condensé symétrique. Avec une zone de 10 noeuds nous avons obtenues une absorption comparable à la condition de la charge adaptée. La méthode des zones absorbantes n'est donc pas une amélioration par rapport à la charge adaptée, qui est plus simple à réaliser.

Jusqu'ici la meilleure condition que nous ayons trouvée est la condition d'extrapolation espace-temps. Cependant, quand nous avons appliqué la condition d'extrapolation espace-temps tout autour du domaine de calcul d'une ligne micro-ruban, nous nous sommes aperçus que même la condition d'extrapolation espace-temps d'ordre 1 est instable. La condition d'extrapolation espace-temps n'est donc pas utilisable pour les calculs des lignes micro-ruban, de même la condition de Lindmann, qui peut être regardée comme une amélioration de la condition espace-temps du premier ordre.

Nous conseillons donc d'utiliser pour des calculs sur les lignes micro-rubans la condition la plus simple, la charge adaptée.

Pour la suite nous avons examiné quelle est la distance qu'il faut garder entre le ruban et les limites du domaine de calcul pour ne pas avoir une perturbation dans le flux de puissance. Nous avons trouvé que, indépendamment de la permittivité et de la fréquence, une distance de 15 noeuds est suffisante pour un ruban de largeur $w = 4$ mailles.

Nous avons montré comment on peut calculer le couplage pour deux lignes micro-rubans couplées. Les résultats étaient en bon accord avec les mesures que nous avons faites. Dans les calculs on voit bien l'influence des coudes de la structure considérée.

Finalement nous avons montré comment on peut calculer les diagrammes de rayonnement pour le champ proche et pour le champ lointain pour un coude. Pour le champ proche on obtient des lobes frontaux et des lobes au dessus du coude. Pour le champ lointain on obtient qu'un seul lobe au dessus du coude. Les calculs ont tous été faits avec la condition de charge adaptée.

Bibliographie

- [All87] R. Allen, A. Mallik, P. Johns. *Numerical Results for the Symmetrical Condensed TLM Node* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **35**, 4, (1987), 378
- [Ame68] W. F. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* Nelson and Sons GB , (1969)
- [Ard55] M. Arditi. *Characteristics and applications of microstrip for microwave wiring* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **3**, (1955), 31-56
- [Ber94] J. P. Berenger. *A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves* Journal of Computational Physics **114**, (1994), 185
- [Bla88] J. G. Blaschak, G. A. Kriegsmann. *A comparative study of Absorbing Boundary Conditions* Journal of Computational Physics **77**, (1988), 109
- [Cam91] S.L. Campbell, C.D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear Transformations* New York, Dover (1991)
- [Che92] Z. Chen. *Transmission Line Matrix (TLM) Method and its Boundary Treatments*. thesis, Ottawa, Canada (1992)
- [Che93] Z. Chen, M. M. Ney, W. J. R. Hofer. *Absorbing and Connecting Boundary Conditions for the TLM method* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **41**, 11, (1993), 2016
- [Chr95] C. Christopoulos *The Transmission Line Modeling Method* IEEE Press, New York and Oxford University Press, Oxford (1995)
- [Duk56] J. M. C. Dukes. *An investigation into some fundamental properties of strip transmission lines with the aid of an electrolytic tank* Proc. IEEE Eng. Part B **103**, (1956), 319-333
- [Esw94] C. Eswarappa, W. J. R. Hofer. *One-Way Equation Absorbing Boundary Conditions for 3D TLM Analysis of Planar and Quasi-Planar Structures* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **42**, 9, (1994), 1669

- [Esw95] C. Eswarappa, W. J. R. Hoefer. *Real Time Interface between TLM and FDTD Modules and Applications* First International Workshop on Transmission Line Matrix Modeling. Theory and Applications, Victoria (1995), 59
- [Esw96] C. Eswarappa, W. J. R. Hoefer. *Hybrid 3D TLM-FDTD Model of Microwave Fields* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques Symp. Digest, San Francisco, (1996), 1063
- [Eu194] F. Eulerink. *Numerical relativistic hydrodynamics* PhD Thesis, Sterrewacht Leiden, Huygens Laboratorium, Leiden (1994)
- [Fan90] J. Fang, K.K. Mei. *High order absorbing boundary conditions without high order derivatives* IEEE, Proc. Antennas and Propagation 4, (1990), 1368
- [Gre65] H.F. Green. *The numerical solution of some important transmission-line problems* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **13**, (1965), 676-692
- [Gup79] K.C. Gupta, R. Garg, I.J. Bahl. *Microstriplines and Slotlines* Artech House Massachusetts (1979)
- [Hal88] L. Halpern, L. N. Trefethen. *Wide Angle One-Way Wave Equations* Journal Acoustic Soc. Am. **84**, 4, (1988), 1397
- [Hig86] R. L. Higdon. *Absorbing Boundary Conditions for Difference Approximations to the Multi-Dimensional Wave-Equation* Mathematics of Computation **47**, 176, (1986), 437
- [Hoe85] W. J. R. Hoefer. *The Transmission Line Matrix Method, Theory and Applications* IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques **33**, 10, (1985), 882, (1985)
- [Hoe92] W. J. R. Hoefer. *Time domain electromagnetic simulation for Microwave CAD Applications* IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques **40**, 7, (1992), 1517
- [Hy165] T. M. Hylltin. *Microstrip transmission on semiconductor dielectrics* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **13**, (1965), 777-781
- [Ito89] T. Itoh. *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter Passive Structures* John Wiley and Sons New York (1989)
- [Joh71] P. B. Johns, R. L. Beurle. *Numerical Solution of 2D scattering problems using a transmission line matrix* Proc. IEE Trans. **118**, 9, (1971), 1203
- [Joh86] P. B. Johns. *New symmetrical condensed node for three dimensional solution of electromagnetic wave problems by TLM* Electronic Letters **22**, 3, (1986), 162
- [Joh87] P. B. Johns. *A symmetrical condensed node for the TLM method* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **35**, 4, (1987), 370

- [Jon86] D. S. Jones. *Acoustic and Electromagnetic Waves* Oxford Science Pub. . (1986)
- [Key85] R. G. Keys. *Absorbing boundary conditions for acoustic media* Geophysics **50**, 6, (1985), 892
- [Kur65] K. Kurokiwa. *Power Waves and the Scattering Matrix* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques (1965), 195
- [LeM97] F. Le Maguer, N. Pena, M. Ney. *Etude des couches adaptées pour le calcul des paramètres S des structures planaires en TLM 3D* NUMELEC, Lyon, Mars (1997)
- [LoV93] J. LoVetri, N.R.S. Simons. *A Class of Symmetrical Condensed Node TLM Methods Derived Directly from Maxwell's Equations* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **41**, 8, (1993), 1419
- [Mit74] R. Mittra, T. Itoh. *Analysis of Microstrip Transmission Lines* Advances in Microwaves, **8**, (1974), 67
- [Moo88] T.G. Moore, J.G. Blaschak, A. Tallove, G.A. Kriegsmann. *Theory and Application of Radiation boundary operators* IEEE, Antennas and Propagation **36**, 12, (1988), 1797
- [Mor92] J.A. Morente, J.A. Porti, M. Khalladi. *Absorbing boundary conditions for the TLM method* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **40**, 11, (1992), 2095
- [Nay90] P. Naylor, R. A. Desay. *for the New three dimensional symmetrical condensed lossy node for solution of electromagnetic wave problems by TLM* Electronic Letters **26**, 7, (1990), 492
- [Nie91] J.S. Nielsen, W.J.R. Hofer. *A complete dispersion Analysis of the condensed node TLM mesh* IEEE, Trans. on Magnetics **27**, (1991), 5
- [Pre86] W.H. Press, B.P. Flannery S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. *Numerical Recipes*, Cambridge UP (1986)
- [Ren92] R. A. Renaut. *Absorbing boundary conditions, Difference operators and Stability* Journal of Computational Physics **102**, (1992), 236
- [Sag82] P. Saguet, E. Pic. *Utilisation d'un nouveau type de noeud dans la méthode TLM en trois dimensions* Electronic Letters **18**, no. 11 (1982), 478
- [Sag85] P. Saguet. *Analyse des Milieux Guidés. La Méthode MTLM* These Université / INP Grenoble (1985)
- [Sag89] P. Saguet. *The 3D Transmission-Line Matrix Method. Theory and Comparison of the Processes* International Journal of Numerical Modeling **2**, (1989), 191
- [Sim92] N.R.S. Simons, E. Bridges. *Application of the TLM method to two-dimensional Scattering Problems* International Journal of Numerical Modeling **5**, (1992), 109

- [Sob71] H. Sobol. *Application of integrated circuit technology to microwave frequencies* Proc. IEEE **59** (1971), 1200-1211
- [Sti68] H.E. Stinehelfer. *An accurate calculation of uniform microstrip transmission lines* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **16**, (1968), 439-444
- [Tre82] L. N. Trefethen. *Group velocity in finite difference schemes* SIAM Review **24**, 2, (1982), 113
- [Tre86] L. N. Trefethen, L. Halpern. *Well-Posedness of One-Way Wave Equations and Absorbing Boundary Conditions* Mathematics of Computation **47**, 176, (1986), 421
- [War71] R. D. Ward, R. Mittra, T. Itoh. *Application of Galerkin's Method for Analyzing Microstrip Transmission Line* Antenna Lab. Rep. No. 71-8, University of Illinois, Urbana (1971)
- [Wex69] A. Wexler. *Computation of electromagnetic fields* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **17**, (1969), 416-439
- [Whe65] H.A. Wheeler. *Transmission-line properties of parallel strips separated by a dielectric sheet.* IEEE, Trans. on Microwave Theory Tech. **13** (1965), 172-185
- [Yam68] E. Yamashita, R. Mittra. *Variational method for the analysis of microstrip lines* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **16**, (1968), 251-256
- [Yam68b] E. Yamashita. *Variational method for the analysis of microstrip-like transmission lines* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **16**, (1968), 529-535
- [Yam70] E. Yamashita, K. Atsuki. *Strip line with rectangular outer conductor and three dielectric layers* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **18**, (1970), 238-244
- [Yam71] E. Yamashita, K. Atsuki. *Analysis of thick-strip transmission lines* IEEE, Trans. on Microwave Theory and Techniques **19**, (1971), 120-122
- [Yee66] K.S. Yee. *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwells Equations in Isotropic Media* IEEE, Trans. on Antennas and Propagation (1966), 302
- [You74] L. Young, H. Sobol (Ed.). *Advances in Microwaves* **8** (1974)

Résumé:

Ce travail est constitué de 3 parties principales. Après une introduction à l'analyse des lignes micro-ruban sous approximation de propagation des signaux en mode TEM, la première partie traite d'une méthode d'analyse dynamique valable pour des distributions de champs qui peuvent même être éloignées du mode TEM, la méthode TLM (Transmission Line Matrix Method), introduite 1971 par Johns et al. La méthode TLM est présentée comme un processus de répartition basé sur la décomposition des équations de Maxwell sous forme matricielle.

Dans une deuxième partie nous traitons de la possibilité d'utiliser la méthode TLM dans les problèmes dits de l'espace ouvert, c'est à dire des espaces de calcul limités par des parois absorbant toute l'énergie quittant le domaine de calcul. Cela est nécessaire afin de réduire l'espace mémoire nécessaire pour calculer par exemple des effets de rayonnement et de diffraction.

Dans la troisième partie nous appliquons la méthode TLM pour calculer les paramètres des différentes discontinuités micro-ruban, en particulier les effets de couplage et de rayonnement. Au moyen d'une transformation des champs proches en champs lointains nous déterminons également les diagrammes de rayonnement correspondants.

L'ensemble du travail se situe dans le cadre des problèmes de compatibilité électromagnétique.